

3.4.2. Cartesian Product. 我們曾強調對於集合我們是不考慮其元素的排列順序, 例如 $\{1, 2\}$ 和 $\{2, 1\}$ 是相同的集合. 不過若考慮集合 $S_1 = \{\{1\}, \{1, 2\}\}$ 和 $S_2 = \{\{2\}, \{1, 2\}\}$, 很容易知道 $\{1\} \in S_1$ 且 $\{1\} \notin S_2$, 所以我們知道 $S_1 \neq S_2$. 這個方法, 幫助我們將 1, 2 這兩個元素做了排序. 因此我們定義以下的符號.

Definition 3.4.6. 假設 A, B 為 sets. 若 $a \in A, b \in B$, 我們定義 *ordered pair*

$$(a, b) = \{\{a\}, \{a, b\}\}.$$

且令

$$A \times B = \{(a, b) : a \in A, b \in B\},$$

稱之為 the *Cartesian product* of A and B .

所謂 ordered pair, 意指有序的數對, 也就是這裡的元素都是成對出現, 而且順序是有關的. 例如前面的例子, 我們有 $(1, 2) = \{\{1\}, \{1, 2\}\}$, 而 $(2, 1) = \{\{2\}, \{1, 2\}\}$, 故 $(1, 2) \neq (2, 1)$. 一般來說設 $a, a' \in A, b, b' \in B$. 若 $a = a', b = b'$, 則依集合相等的定義, 我們有

$$(a, b) = \{\{a\}, \{a, b\}\} = \{\{a'\}, \{a', b'\}\} = (a', b').$$

另一方面若 $(a, b) = (a', b')$ 表示 $\{\{a\}, \{a, b\}\} = \{\{a'\}, \{a', b'\}\}$. 現若 $a \neq b$, 表示 $\{a, b\}$ 中有兩個元素, 故若 $(a, b) = (a', b')$, 表示 $\{a', b'\}$ 必須亦為有兩個元素的集合 (否則 $\{\{a'\}, \{a', b'\}\}$ 中沒有一個有兩元素的集合, 不可能等於 $\{\{a\}, \{a, b\}\}$). 既然如此, 由集合相等之定義, 我們必有 $\{a\} = \{a'\}$ 以及 $\{a, b\} = \{a', b'\}$. 這告訴我們 $a = a'$ 且 $b = b'$. 而若 $\{a, b\}$ 中僅有一元素, 即 $a = b$. 此時依集合定義 $\{a, b\} = \{a\}$, 故

$$(a, b) = (a, a) = \{\{a\}, \{a, b\}\} = \{\{a\}, \{a\}\} = \{\{a\}\}.$$

因此, 這時候要 $(a, b) = (a', b')$ 非得 $b' = a' = a$, 故此時依然有 $a = a'$ 且 $b = b'$. 我們證得了以下的結果.

Proposition 3.4.7. 假設 A, B 為 sets, 又設 $a, a' \in A$ 且 $b, b' \in B$ 則 $(a, b) = (a', b')$ 若且唯若 $a = a'$ 且 $b = b'$.

我們觀察一下, 當 $a \in A, b \in B$, $\{\{a\}, \{a, b\}\}$ 會是哪一個集合的元素. 首先由 $\{a, b\}$ 我們可以看出, 此集合應該和 $A \cup B$ 有關. 又 $\{a\}, \{a, b\}$ 為 $A \cup B$ 的 subset, 我們有 $\{a\}$ 和 $\{a, b\}$ 皆為 $\mathcal{P}(A \cup B)$ 的元素. 故 $\{\{a\}, \{a, b\}\}$ 為 $\mathcal{P}(A \cup B)$ 的子集合, 得 $\{\{a\}, \{a, b\}\} \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(A \cup B))$. 也就是說 (a, b) 為 $\mathcal{P}(\mathcal{P}(A \cup B))$ 中的元素. 從這裡知道將 (a, b) 考慮成 $\{\{a\}, \{a, b\}\}$ 這樣複雜的集合, 以後處理問題很不方便. 不過 Proposition 3.4.7 告訴我們, 以後可以不去管 (a, b) 的原始定義. 直接將 (a, b) 看成是 $A \times B$ 中的一個元素, 我們可以直接利用 $(a, b) = (a', b')$ 來探討 $A \times B$ 這樣的集合的相關性質.

Example 3.4.8. (1) 假設 $A = \{a, b\}, B = \{1, 2, 3\}$. 則依定義我們可以將 $A \times B$ 寫成

$$A \times B = \{(a, 1), (a, 2), (a, 3), (b, 1), (b, 2), (b, 3)\}.$$

另外依定義我們有 $A \times \{\emptyset\} = \{(a, \emptyset), (b, \emptyset)\}$.

(2) 考慮 $S = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : x^2 + y^2 \leq 1\}$. 雖然 S 為 $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ 的 subset, 但不存在 $A \subseteq \mathbb{R}$, $B \subseteq \mathbb{R}$ 使得 $S = A \times B$. 事實上, 若 $S = A \times B$, 由 $(1, 0) \in S$, 我們得 $1 \in A$. 另外 $(0, 1) \in S$, 我們得 $1 \in B$. 因此得 $(1, 1) \in A \times B$. 然而 $1^2 + 1^2 = 2 > 1$, 得 $(1, 1) \notin S$. 此與 $S = A \times B$ 的假設矛盾, 故得證不存在 $A \subseteq \mathbb{R}$, $B \subseteq \mathbb{R}$ 使得 $S = A \times B$.

要注意區分 $A \times \emptyset$ 和 $A \times \{0\}$ 之不同. 依定義 $(x, y) \in A \times \{0\}$ 表示 $x \in A$ 以及 $y \in \{0\}$, 故此時因 $\{0\}$ 是一個僅有一個元素 0 的集合, 故 $y = 0$. 然而 $(x, y) \in A \times \emptyset$ 表示 $x \in A$ 以及 $y \in \emptyset$, 不過不可能會有元素屬於 $\emptyset$, 故此處 y 並不存在. 所以依定義 $A \times \emptyset$ 中沒有任何元素, 故得 $A \times \emptyset = \emptyset$. 同理我們會有 $\emptyset \times B = \emptyset$. 事實上我們有以下的結果.

Proposition 3.4.9. 假設 A, B 為 sets, 則 $A \times B = \emptyset$ 若且唯若 $A = \emptyset$ 或 $B = \emptyset$.

Proof. 我們僅剩下證明若 $A \times B = \emptyset$, 則 $A = \emptyset$ 或 $B = \emptyset$. 利用 contrapositive method, 假設 $A \neq \emptyset$ 且 $B \neq \emptyset$. 此時存在 $a \in A$ 且 $b \in B$, 故存在 $(a, b) \in A \times B$. 得證 $A \times B \neq \emptyset$. $\square$

當 A, B 為 finite sets 時, 我們可以如 Example 3.4.8 一一列出 $A \times B$ 中的元素. 當我們選定 $a \in A$ 後, 考慮 $(a, y) \in A \times B$. 由 Proposition 3.4.7 我們知, 當我們選 y 為 B 中的相異元素時, 所得的 (a, y) 就會不同. 也就是說此時 $A \times B$ 中為 (a, y) 這樣形式的元素共有 $\#(B)$ 個. 然而當 a 不同時這些元素亦皆不同, 故由排列組合中的乘法原理我們知 $A \times B$ 共會有 $\#(A) \times \#(B)$ 個元素, 因此有以下之定理.

Proposition 3.4.10. 假設 A, B 為 finite sets. 則 $\#(A \times B) = \#(A) \times \#(B)$.

因為 $\#(\emptyset) = 0$, 故由 Proposition 3.4.10 得 $\#(A \times \emptyset) = \#(A) \times \#(\emptyset) = 0$. 此結論和 Proposition 3.4.9 中 $A \times \emptyset = \emptyset$ 的結論一致.

接下來我們探討 Cartesian product 對集合包含關係的影響. 首先注意, 對於任意的 set A , 當 $B = \emptyset$ 時, 我們有 $A \times B = \emptyset$ 所以我們無法由 $A \times B$ 和 $A' \times B$ 來判斷 A, A' 之間的關係. 因此我們必須排除 $A \times B$ 其中 A, B 任一個是 $\emptyset$ 的情形. 我們有以下的結果.

Proposition 3.4.11. 假設 A, B, C, D 為 sets 且 $A \neq \emptyset$ 以及 $B \neq \emptyset$. 則 $A \subseteq C$ 且 $B \subseteq D$ 若且唯若 $(A \times B) \subseteq (C \times D)$.

Proof. $(\Rightarrow)$: 假設 $A \subseteq C$ 且 $B \subseteq D$. 現任取 $(x, y) \in A \times B$, 表示 $x \in A$ 且 $y \in B$, 故由 $A \subseteq C$ 且 $B \subseteq D$ 得 $x \in C$ 且 $y \in D$. 因此依定義知 $(x, y) \in C \times D$, 得證 $(A \times B) \subseteq (C \times D)$.

$(\Leftarrow)$: 假設 $(A \times B) \subseteq (C \times D)$. 現任取 $x \in A$, 由於 $B \neq \emptyset$, 故存在 $b \in B$. 此時考慮 $(x, b) \in A \times B$. 利用 $(A \times B) \subseteq (C \times D)$, 得 $(x, b) \in C \times D$. 因此依定義知 $x \in C$, 得證 $A \subseteq C$. 同理, 任取 $y \in B$, 由於 $A \neq \emptyset$, 故存在 $a \in A$. 此時考慮 $(a, y) \in A \times B$. 利用 $(A \times B) \subseteq (C \times D)$, 得 $(a, y) \in C \times D$. 因此依定義知 $y \in D$, 得證 $B \subseteq D$. $\square$

Question 3.19. Proposition 3.4.11 的證明中, 哪一部分需要 $A \neq \emptyset$ 以及 $B \neq \emptyset$ 的假設? 又為何將 $A \subseteq C$ 和 $B \subseteq D$ 分開來證明?

接下來我們看 Cartesian product 和 intersection 的關係.

Proposition 3.4.12. 假設 A, B, C, D 為 sets. 則

$$(A \cap C) \times B = (A \times B) \cap (C \times B) \quad \text{and} \quad A \times (B \cap D) = (A \times B) \cap (A \times D).$$

Proof. 因 $(A \cap C) \subseteq A$ 且 $(A \cap C) \subseteq C$ 由 Proposition 3.4.11 知 $((A \cap C) \times B) \subseteq (A \times B)$ 且 $((A \cap C) \times B) \subseteq (C \times B)$ (注意 Proposition 3.4.11 此部分不需非空集合的假設). 故由 Corollary 3.2.4(1) 得 $((A \cap C) \times B) \subseteq (A \times B) \cap (C \times B)$.

另一方面, 對任意 $(x, y) \in (A \times B) \cap (C \times B)$, 我們有 $(x, y) \in A \times B$ 且 $(x, y) \in C \times B$. 因此 $x \in A$ 且 $x \in C$ 以及 $y \in B$, 得 $x \in A \cap C$ 且 $y \in B$, 故知 $(x, y) \in (A \cap C) \times B$. 得證 $(A \times B) \cap (C \times B) \subseteq (A \cap C) \times B$, 因此證明了 $(A \cap C) \times B = (A \times B) \cap (C \times B)$. 同理可證 $A \times (B \cap D) = (A \times B) \cap (A \times D)$. $\square$

利用 Proposition 3.4.12 我們可以求 $(A \cap C) \times (B \cap D)$. 首先將 Proposition 3.4.12 中的 B 以 $B \cap D$ 取代, 得 $(A \cap C) \times (B \cap D) = (A \times (B \cap D)) \cap (C \times (B \cap D))$. 再由 $A \times (B \cap D) = (A \times B) \cap (A \times D)$ 以及 $C \times (B \cap D) = (C \times B) \cap (C \times D)$, 我們得

$$(A \cap C) \times (B \cap D) = (A \times B) \cap (A \times D) \cap (C \times B) \cap (C \times D). \quad (3.5)$$

現若 $(x, y) \in (A \times B) \cap (C \times D)$ 表示 $(x, y) \in A \times B$ (知 $x \in A, y \in B$) 且 $(x, y) \in C \times D$ (知 $x \in C, y \in D$), 故得 $(x, y) \in A \times D$ (因 $x \in A, y \in D$) 且 $(x, y) \in C \times B$ (因 $x \in C, y \in B$). 因此得 $(x, y) \in (A \times D) \cap (C \times B)$, 得證 $((A \times B) \cap (C \times D)) \subseteq ((A \times D) \cap (C \times B))$. 故由 Proposition 3.2.5 知式子 (3.5) 可化簡成

$$(A \cap C) \times (B \cap D) = ((A \times B) \cap (C \times D)) \cap ((A \times D) \cap (C \times B)) = (A \times B) \cap (C \times D).$$

我們有以下之結果.

Corollary 3.4.13. 假設 A, B, C, D 為 sets. 則

$$(A \cap C) \times (B \cap D) = (A \times B) \cap (C \times D).$$

Question 3.20. 你能利用 Corollary 3.4.13 證明 $(A \cap C) \times (B \cap D) = (A \times D) \cap (C \times B)$ 嗎? 試不套用 Corollary 3.4.13 直接證明之.

Question 3.21. 試證明 $(A \times B) \cap (C \times D) = (A \times D) \cap (C \times B)$.

一般來說, 我們會想知道一些集合的 Cartesian products 在經過 operations 後是否仍為 Cartesian product. 例如在交集的情形, 我們會想知道兩對集合的 Cartesian products 的交集是否可寫成一對集合的 Cartesian product. 也就是說 $(A \times B) \cap (C \times D)$ 是否仍可寫成一個 Cartesian product $S \times T$ 的形式. 由 Corollary 3.4.13 我們知道這個答案是肯定的. 只要令 $S = A \cap C, T = B \cap D$, 則 $(A \times B) \cap (C \times D) = S \times T$. 由此我們也知, 任意多對集合的 Cartesian products 的交集仍為 Cartesian product.

Question 3.22. 假設 $\{A_i, i \in I\}, \{B_i, i \in I\}$ 是以 I 為 index set 的 indexed family. 試證明

$$\bigcap_{i \in I} (A_i \times B_i) = \left(\bigcap_{i \in I} A_i \right) \times \left(\bigcap_{i \in I} B_i \right).$$

對於 Cartesian product 和 union 也有和 Proposition 3.4.12 類似的關係。

Proposition 3.4.14. 假設 A, B, C, D 為 *sets*. 則

$$(A \cup C) \times B = (A \times B) \cup (C \times B) \quad \text{and} \quad A \times (B \cup D) = (A \times B) \cup (A \times D).$$

Proof. 因 $A \subseteq (A \cup C)$ 且 $C \subseteq (A \cup C)$ 由 Proposition 3.4.11 知 $(A \times B) \subseteq ((A \cup C) \times B)$ 且 $(C \times B) \subseteq ((A \cup C) \times B)$. 故由 Corollary 3.2.4(2) 得 $(A \times B) \cup (C \times B) \subseteq ((A \cup C) \times B)$.

另一方面, 對任意 $(x, y) \in (A \cup C) \times B$, 我們有 $x \in A \cup C$ 以及 $y \in B$, 得 $x \in A$ 或 $x \in C$ 且 $y \in B$. 若 $x \in A$, 則由 $y \in B$ 得 $(x, y) \in A \times B$, 而若 $x \in C$, 則由 $y \in B$ 得 $(x, y) \in C \times B$. 故知 $(x, y) \in A \times B$ 或 $(x, y) \in C \times B$, 亦即 $(x, y) \in (A \times B) \cup (C \times B)$. 得證 $((A \cup C) \times B) \subseteq (A \times B) \cup (C \times B)$, 因此證明了 $(A \cup C) \times B = (A \times B) \cup (C \times B)$. 同理可證 $A \times (B \cup D) = (A \times B) \cup (A \times D)$ $\square$

Question 3.23. 試利用數學歸納法證明當 A, B 為 *finite sets* 時 $\#(A \times B) = \#(A) \times \#(B)$ (Proposition 3.4.10). (*Hint:* 固定集合 A 的個數再對集合 B 的個數使用數學歸納法. 需用到 Proposition 3.4.14.)

利用 Proposition 3.4.14 我們可以求 $(A \cup C) \times (B \cup D)$. 首先將 Proposition 3.4.14 中的 B 以 $B \cup D$ 取代, 得 $(A \cup C) \times (B \cup D) = (A \times (B \cup D)) \cup (C \times (B \cup D))$. 再由 $A \times (B \cup D) = (A \times B) \cup (A \times D)$ 以及 $C \times (B \cup D) = (C \times B) \cup (C \times D)$, 我們得以下的結果.

Corollary 3.4.15. 假設 A, B, C, D 為 *sets*. 則

$$(A \cup C) \times (B \cup D) = (A \times B) \cup (A \times D) \cup (C \times B) \cup (C \times D).$$

注意 $(A \cup C) \times (B \cup D)$ 一般來說不會有類似 Corollary 3.4.13 中的性質. 也就是說一般的情形 $(A \cup C) \times (B \cup D)$ 是不會等於 $(A \times B) \cup (C \times D)$ 的. 這是因為一般來說 $A \times D$ 是不會包含於 $(A \times B) \cup (C \times D)$ (除非 $A \subseteq C$ 或 $D \subseteq B$). 所以我們只要考慮 $A \not\subseteq C$ 且 $D \not\subseteq B$, 就能找出反例. 例如當 A, D 皆不是 $\emptyset$ 但 $B = C = \emptyset$, 則 $(A \cup C) \times (B \cup D) = A \times D$ 不為 $\emptyset$ (參見 Proposition 3.4.9), 但 $(A \times B) \cup (C \times D) = \emptyset \cup \emptyset = \emptyset$. 故此時 $(A \cup C) \times (B \cup D) \neq (A \times B) \cup (C \times D)$.

Question 3.24. 試找另外的例子使得 $(A \cup C) \times (B \cup D) \neq (A \times B) \cup (C \times D)$.

從前面的探討, 我們特別強調一下, 除了一些特殊的情況 (例如 $A \subseteq C$ 且 $B \subseteq D$), 在一般的情況 Cartesian product 的聯集 $(A \times B) \cup (C \times D)$ 無法寫成一個 Cartesian product $S \times T$ 的形式.

最後我們看 Cartesian product 和 set difference 之關係.

Proposition 3.4.16. 假設 A, B, C, D 為 *sets*. 則

$$(C \setminus A) \times B = (C \times B) \setminus (A \times B) \quad \text{and} \quad A \times (D \setminus B) = (A \times D) \setminus (A \times B).$$

Proof. 對任意 $(x, y) \in (C \setminus A) \times B$, 我們有 $x \in C \setminus A$ 以及 $y \in B$. 亦即 $x \in C$ 且 $x \notin A$ 以及 $y \in B$. 此時我們知 $(x, y) \in C \times B$ 且 $(x, y) \notin A \times B$ (否則 $(x, y) \in A \times B$ 會導致 $x \in A$ 之矛盾). 故得 $(x, y) \in (C \times B) \setminus (A \times B)$, 證明了 $(C \setminus A) \times B \subseteq (C \times B) \setminus (A \times B)$.

另一方面, 對任意 $(x, y) \in (C \times B) \setminus (A \times B)$, 我們有 $(x, y) \in C \times B$ (得 $x \in C, y \in B$) 且 $(x, y) \notin A \times B$ (得 $x \notin A$ 或 $y \notin B$). 但由 $(x, y) \in C \times B$ 我們知 $y \in B$, 故由 $(x, y) \notin A \times B$ 知 $x \notin A$ (否則 $x \in A$ 加上 $y \in B$ 會造成 $(x, y) \in A \times B$ 之矛盾). 因此由 $x \in C$ 且 $x \notin A$ 以及 $y \in B$, 推得 $(x, y) \in (C \setminus A) \times B$, 證明了 $(C \times B) \setminus (A \times B) \subseteq (C \setminus A) \times B$. 得證 $(C \setminus A) \times B = (C \times B) \setminus (A \times B)$. 同理可得 $A \times (D \setminus B) = (A \times D) \setminus (A \times B)$. $\square$

我們也順便討論一下 Cartesian product 和 complement 的關係. 這裡要特別說明, 其實 Cartesian product 很重要的地方是它可以幫我們連結兩個不同字集中的集合. 也就是說若集合 A 所在的字集為 X , 而集合 B 所在的字集為 Y , 我們仍可談論 $A \times B$. 不過此時 $A \times B$ 所在的字集應為 $X \times Y$. 而這裡我們談 A 的 complement A^c 是指在 X 裡的 complement, 亦即 $A^c = X \setminus A$. 同理 B^c 指的是 B 在 Y 的 complement, 即 $B^c = Y \setminus B$. 而 $A \times B$ 的 complement $(A \times B)^c$, 指的是 $A \times B$ 在 $X \times Y$ 的 complement, 即 $(A \times B)^c = (X \times Y) \setminus (A \times B)$. 所以要特別注意, 這裡三個 complement 分指在三個不同 universal sets 上的 complement.

現將 X, Y 分別寫成 $X = A \cup A^c, Y = B \cup B^c$, 考慮 $X \times Y = (A \cup A^c) \times (B \cup B^c)$, 由 Corollary 3.4.15, 得

$$X \times Y = (A \times B) \cup (A \times B^c) \cup (A^c \times B) \cup (A^c \times B^c). \quad (3.6)$$

再由 Corollary 3.4.13, 我們知

$$\begin{aligned} (A \times B) \cap (A \times B^c) &= A \times (B \cap B^c) = \emptyset, \\ (A \times B) \cap (A^c \times B) &= (A \cap A^c) \times B = \emptyset, \\ (A \times B) \cap (A^c \times B^c) &= (A \cap A^c) \times (B \cap B^c) = \emptyset. \end{aligned}$$

故得

$$(A \times B) \cap ((A \times B^c) \cup (A^c \times B) \cup (A^c \times B^c)) = \emptyset. \quad (3.7)$$

因此連結式子 (3.6), (3.7) 得證以下定理.

Proposition 3.4.17. 假設 A, B 為 sets. 則 $(A \times B)^c = (A \times B^c) \cup (A^c \times B) \cup (A^c \times B^c)$.

最後說明一下, 其實我們可以談論三個或更多集合的 Cartesian product. 不過因為我們之後不需用到, 就不探討這方面的問題了.

Relation and Order

在這一章我們將介紹 relation. Relation 一般有分不同集合之間其元素的 relation 以及同一個集合其元素相互的 relation. 我們將會專注於同一個 set 自身的 relation. 我們會介紹幾種特殊性質的 relation, 其中最重要的是所謂的 equivalence relation. Equivalence relation 可以幫助我們在一個集合之間做分類, 有時定出一個好的 equivalence relation 可以幫助我們更加了解一個 set 的特性. 所以學習 relation 是一個重要的課題. 我們還會介紹另一種 relation, 就是所謂的 order. Order 的意義就是所謂的排序 (比較大小), 所以它是另一個幫助我們了解一個 set 的重要工具.

4.1. Relation

給定兩個 sets X, Y . 若 S 是 $X \times Y$ 的一個 nonempty subset, 我們就稱 S 是一個 relation from X to Y . 特別地, 一個 $X \times X$ 的 nonempty subset S 就稱為一個 relation on X .

給定一個 relation S 之後, 我們一般會用 $x \sim y$ 來表示 (x, y) 是 S 裡的元素. 這個符號 $x \sim y$ 的好處是容易讓人感受 x 和 y 是有關係的, 比較貼切 relation 字面上的意思. 不過當我們要回歸到利用集合的性質處理 relation 的問題時, 回歸到 $(x, y) \in S$ 的定義, 會比較方便.

Example 4.1.1. (1) 考慮 $X = \{1, 0, -1\}$, $Y = \{0, 1, 2\}$. 定義 $S = \{(x, y) \in X \times Y : y = x^2 + 1\}$. 則 S 是一個 X 到 Y 的 relation. 在此 relation 之下我們有 $1 \sim 2$, $0 \sim 1$ 以及 $-1 \sim 2$.

(2) 考慮 $X = \{1, 0, -1\}$. 定義 $S = \{(x, x') \in X \times X : x > x'\}$. 則 S 是 X 上的一個 relation. 在此 relation 之下我們有 $1 \sim 0$, $1 \sim -1$ 以及 $0 \sim -1$.

Question 4.1. 假設 X 為 nonempty set. 考慮 X 上的 relation S . 試證明 $S = X \times X$ 若且唯若對任意 $x, y \in X$ 皆有 $x \sim y$.

一般來說一個兩個不同集合的 relation 主要是用來探討兩集合之間的關係, 例如 Example 4.1.1(1) 就是有關 X, Y 兩集合間的函數 $f(x) = x^2 + 1$ 所產生的 relation. 另一方面同一集合的 relation, 主要用來探討這個集合元素之間的關係, 例如 Example 4.1.1(2) 就是有關集合 X 元素之間的大小關係所產生的 relation.

雖然一開始我們的 relation 是由一個 $X \times Y$ 的子集合開始定起, 然後我們利用 S 來描繪 X, Y 裡的元素之間的關係. 不過我們也可由一個已知 X, Y 裡的元素之間的關係, 來得到 S 這樣的 $X \times Y$ 的子集合. 這樣我們便可利用集合的性質來談論這個 relation 的性質. Example 4.1.1 中的例子事實上就是由已知的關係 (函數, 大小關係) 來描繪 S 這一個集合. 我們看下一個較抽象的例子.

Example 4.1.2. 給定一集合 X 我們要如何定一個 relation 來描繪 X 的子集合間“包含於”的關係呢?

首先這個 relation 所關係的元素應該是 X 的子集合, 所以我們應該建立的是 X 的 power set $\mathcal{P}(X)$ 上的 relation. 也就是說我們需要找到 $S \subseteq \mathcal{P}(X) \times \mathcal{P}(X)$ 滿足 $A \subseteq B$ 若且唯若 $(A, B) \in S$. 所以我們可以定 $S = \{(A, B) \in \mathcal{P}(X) \times \mathcal{P}(X) : A \subseteq B\}$. 在這個 relation 之下我們就會有 $A \sim B$ 若且唯若 $A \subseteq B$ 了.

接下來在本章中, 我們專注於談論一個集合上的 relation. 也就是假設 S 是一個 relation on X , 在這情況之下, 我們特別有興趣於有以下三種特性的 relation.

Reflexive: 當 S 滿足對所有 $x \in X$ 皆有 $x \sim x$, 即

$$(x, x) \in S, \forall x \in X,$$

我們稱此 relation 是 *reflexive*.

Symmetric: 當 S 滿足對於 $x, y \in X$ 若 $x \sim y$, 則 $y \sim x$, 即

$$(x, y) \in S \Rightarrow (y, x) \in S,$$

我們稱此 relation 是 *symmetric*.

Transitive: 當 S 滿足對於 $x, y, z \in X$ 若 $x \sim y$ 且 $y \sim z$, 則 $x \sim z$, 即

$$((x, y) \in S) \wedge ((y, z) \in S) \Rightarrow (x, z) \in S,$$

我們稱此 relation 是 *transitive*.

對於這三種性質, 我們特別針對幾種大家可能誤解的情況說明一下.

(1) S 為 reflexive 指的是對任意的 $x \in X$ 皆必須有 (x, x) 一定在 S . 並不是說只要存在 $x \in X$ 使得 $(x, x) \in S$ 就是 reflexive. 另外它也沒有說如果 $(x, y) \in S$ 則 $x = y$. 總而言之, 要檢查 S 是否為 reflexive, 我們僅要檢查是否對於 X 中的元素 x , (x, x) 皆會在 S 中, 而不必管其他 (x, y) 其中 $x \neq y$ 的情況.

(2) S 為 symmetric 指的是對任意的 $(x, y) \in S$ 皆必須有 (y, x) 一定也在 S . 並不是說只要存在一組 (x, y) 以及 (y, x) 在 S 中就是 symmetric. 總而言之, 要檢查 S 是否為 symmetric, 我們僅要檢查是否有 $(x, y) \in S$ 但 $(y, x) \notin S$ 的情況發生. 如果沒有才會是 symmetric, 否則就不是 symmetric.

(3) S 為 transitive 指的是只要 (x, y) 和 (y, z) 在 S 中, 則 (x, z) 一定也在 S . 並不是說只要存在一組 $(x, y), (y, z)$ 和 (x, z) 在 S 中就是 transitive. 另外這裡也沒有說只要 $(x, y) \in S$ 則會有一個 $z \in X$ 使得 $(y, z) \in S$. 所以即使 S 僅有一個元素 (x, y) 那麼 S 也是 transitive. 總而言

之, 要檢查 S 是否為 transitive, 我們僅要檢查是否有 $(x,y), (y,z) \in S$ 但 $(x,z) \notin S$ 的情況發生. 如果沒有才會是 transitive, 否則就不是 transitive.

Example 4.1.3. 令 $X = \{1, 2, 3\}$, 我們探討那些 relation $S \subseteq X \times X$ 是 reflexive, symmetric 或 transitive.

(1) 如果 $S = \{(1,1), (2,2)\}$, 那麼 S 不是 reflexive, 因為 $3 \in X$ 但是 $(3,3) \notin S$. 如果 $S = \{(1,1), (2,2), (3,3), (1,2)\}$, 那麼 S 是 reflexive. 注意在此例中雖然 S 中存在 (x,y) 但 $x \neq y$ 這樣的元素 (即 $(1,2) \in S$) 但不影響其為 reflexive 的事實.

(2) 當 $S = \{(1,1), (2,2)\}$, 我們知 S 不是 reflexive, 不過 S 是 symmetric. 但若加入 $(1,2)$, 即 $S = \{(1,1), (2,2), (1,2)\}$, 此時因 $(1,2) \in S$ 但 $(2,1) \notin S$, 故 S 不是 symmetric. 此時 S 還要加入 $(2,1)$ (即 $S = \{(1,1), (2,2), (1,2), (2,1)\}$) 才會變成 symmetric.

(3) 當 $S = \{(1,1), (2,2), (1,2)\}$, 我們知 S 不是 reflexive, 也不是 symmetric, 但它是 transitive. 但若加入 $(2,3)$, 即 $S = \{(1,1), (2,2), (1,2), (2,3)\}$, 此時因 $(1,2), (2,3) \in S$ 但 $(1,3) \notin S$, 故 S 不是 transitive. 此時 S 還要加入 $(1,3)$ (即 $S = \{(1,1), (2,2), (1,2), (2,3), (1,3)\}$) 才會變成 transitive.

從上一個 Example 我們可以看出 reflexive, symmetric 以及 transitive 是相互獨立的. 也就是說這三個性質相互之間沒有關係. 有可能一個 relation 符合其中一個性質, 但不符合另外兩個性質. 例如有可能一個 relation 是 reflexive 但不是 symmetric 也不是 transitive. 另一方面, 也有可能一個 relation 符合其中兩個性質, 但不符合另外一個性質. 例如有可能一個 relation 是 reflexive 以及 symmetric 但不是 transitive. 這裡最常發現的是以下錯誤的論述誤以為 symmetric 和 transitive 可推得 reflexive.

Example 4.1.4. 假設 X 為一個 set, 而 S 為 X 上的一個 relation. 假設 S 為 symmetric 以及 transitive, 是否可推得 S 為 reflexive? 以下的論述哪裡有錯?

假設 $x \sim y$, 由於 S 為 symmetric, 因此知 $y \sim x$. 也就是說, 我們有 $x \sim y$ 且 $y \sim x$, 故利用 transitive 的性質, 推得 $x \sim x$.

這個論述沒有錯, 錯的是它並沒有證得 S 是 reflexive. 它僅證得了, 對於 $x \in X$, 如果存在 $y \in X$ 滿足 $x \sim y$, 則 $x \sim x$. 但 reflexive 的性質, 最重要的關鍵在於對每一個 $x \in X$, 皆有 $x \sim x$. 現若在 X 中存在一元素 x 根本沒有任何元素和它有關, 也就是說找不到 $y \in X$ 滿足 $x \sim y$, 那麼我們就沒辦法得到 $x \sim x$ 了. 例如 $X = \{1, 2, 3\}$ 的情形, 若 $S = \{(1,1), (2,2), (1,2), (2,1)\}$, 很容易驗證 S 為 symmetric 以及 transitive. 由於 1 找得到元素和它有關 (例如我們有 $1 \sim 2$), 而 2 也找得 1 和它有關 (即 $2 \sim 1$), 所以由 S 為 symmetric 以及 transitive 知 $(1,1), (2,2)$ 皆在 S 中. 然而, 沒有任何和 3 有關的元素, 所以 $(3,3)$ 未必會出現在 S 中. 在此例中 $(3,3) \notin S$, 所以 S 雖為 symmetric 以及 transitive, 但 S 不是 reflexive.

Question 4.2. 令 $X = \{1, 2, 3\}$ 舉例說明存在 relation on X 滿足 reflexive 以及 symmetric 的性質, 但不滿足 transitive 的性質. 並舉例說明存在 relation on X 滿足 reflexive 以及 transitive 的性質, 但不滿足 symmetric 的性質.

最後我們再看 Example 4.1.2 中的 relation 符合哪些性質.

Example 4.1.5. 假設 X 為 nonempty set. 考慮 $S = \{(A, B) \in \mathcal{P}(X) \times \mathcal{P}(X) : A \subseteq B\}$ 為 $\mathcal{P}(X)$ 上的 relation. 首先我們說明 S 為 reflexive. 這是因為對於任意 $A \in \mathcal{P}(X)$, 我們有 $A \subseteq A$ (參見 Proposition 3.1.4(1)), 故 $(A, A) \in S$. 得知 S 為 reflexive. 我們也可得 S 為 transitive. 這是因為若 $(A, B) \in S$ 且 $(B, C) \in S$, 表示 $A \subseteq B$ 且 $B \subseteq C$, 故可得 $A \subseteq C$ (參見 Proposition 3.1.4(2)). 亦即 $(A, C) \in S$, 得證 S 為 transitive. 不過 S 不是 symmetric. 要說明這點, 我們只要找到 $A, B \in \mathcal{P}(X)$ 滿足 $(A, B) \in S$ 但 $(B, A) \notin S$ 即可. 考慮 $A = \emptyset$ 以及 $B = X$ 即可. 這是因為 $\emptyset \in \mathcal{P}(X)$ 且 $X \in \mathcal{P}(X)$ 且 $\emptyset \subseteq X$, 故知 $(\emptyset, X) \in S$. 但已知 $X \neq \emptyset$, 故 $X \not\subseteq \emptyset$, 也就是說 $(X, \emptyset) \notin S$. 得證 S 不是 symmetric.

Question 4.3. 假設 X 為 nonempty set. 考慮 $S = \{(A, B) \in \mathcal{P}(X) \times \mathcal{P}(X) : A \cup B = X\}$ 為 $\mathcal{P}(X)$ 上的 relation.

- (1) 試問 S 一定為 reflexive 嗎? 若答案是否定的, 那 S 一定不是 reflexive 嗎?
- (2) 試問 S 一定為 symmetric 嗎? 若答案是否定的, 那 S 一定不是 symmetric 嗎?
- (3) 試問 S 一定為 transitive 嗎? 若答案是否定的, 那 S 一定不是 transitive 嗎?

4.2. Equivalence Relation

在所有的 relation 中, 最重要的便是所謂 equivalence relation. 它可以幫我們將一個很複雜的集合做分類, 亦即分成所謂的 equivalence classes, 以便讓我們更容易掌握這個集合. 將來在許多數學課程裡, 大家會發現它是一個很方便的工具.

家裡有許多書或是 cd, 要如何找到你想要的書或 cd 呢? 當然最好的方法就是將它們分類. 同樣的, 在數學, 對於一個有很多元素的集合, 我們也可藉由分類的方法來處理這一個集合的相關問題. 一般來說一個好的分類方式必須符合以下三個要素. 第一個就是, 要被分類的東西, 自己和自己必須是同類的; 另一要素是若甲和乙是同類的則乙也必須和甲是同類的; 最後一個要素是如果甲和乙同類且乙和丙同類, 則甲必須和丙同類. 如果我們將一個集合 X 的元素利用這個三個原則分類, 然後將同類的東西視為相關, 例如若 x, y 同類, 則用 $x \sim y$ 來表示. 在這個符號之下, 前面所說的分類的第一個要素: 自己和自己是同類的, 就可表示為對所有 $x \in X$ 皆有 $x \sim x$. 也就是這樣定出的 relation 必為 reflexive. 而第二個要素: 若甲和乙是同類的則乙也必須和甲是同類的, 就可表示為若 $x \sim y$ 則 $y \sim x$. 也就是這樣定出的 relation 必為 symmetric. 最後一個要素: 若甲和乙同類且乙和丙同類, 則甲必須和丙同類, 就可表示為若 $x \sim y$ 且 $y \sim z$ 則 $x \sim z$. 也就是這樣定出的 relation 必為 transitive. 反之, 現如果有一個在 X 上的 relation S 具有 reflexive, symmetric 以及 transitive 這三項性質, 而且我們將符合這個 relation 的元素視為同類 (即若 $x \sim y$, 則是為 x, y 為同類), 那麼這樣的分類方式也會符合好的分類方式的三個要素. 因此我們給符合 reflexive, symmetric 以及 transitive 這三項性質的 relation 一個特殊的名稱. 由於在本節中我們不需要將一個在 X 上的 relation 視為 $X \times X$ 的 subset 來處理問題, 為了方便起見, 我們直接用 $\sim$ 是 X 上的一個 relation 這樣的說法.

Definition 4.2.1. 假設 $\sim$ 是集合 X 上的 relation, 若符合以下三個性質, 則稱此 relation 為 *equivalence relation*

Reflexive: 對所有 $x \in X$, 皆有 $x \sim x$.

Symmetric: 若 $x, y \in X$ 滿足 $x \sim y$, 則 $y \sim x$.

Transitive: 若 $x, y, z \in X$ 滿足 $x \sim y$ 且 $y \sim z$, 則 $x \sim z$.

到底用 equivalence relation 來分類有什麼好處呢? 首先由 reflexive 的性質可得每一個元素都會被分到某一類. 另外由 symmetric 和 transitive 的性質知不會有一個元素會同時分屬於不同的類別, 也就是說兩個不同類的元素所成的集合不會有交集; 這是因為如果 A, B 為不同類, 但 x 在 A 類且在 B 類中. 則在 A 類中的任一元素 a 因和 x 是同類的故 $a \sim x$ 而 B 類中的任一元素 b 因也和 x 同類故 $b \sim x$. 故由 symmetric 和 transitive 的性質知 $a \sim b$. 也就是說 A 中的所有元素和 B 中的所有元素都同類. 這和 A 與 B 是不同類的假設相矛盾。

現假設 $\sim$ 是一個在集合 X 上的 equivalence relation. 對於 $x \in X$, 我們考慮集合 $\{y \in X : y \sim x\}$, 即我們將所有 X 中和 x 相關的元素收集起來. 這樣的集合, 我們稱為 x 的 *equivalence class*, 用 $[x]$ 來表示. 用分類的角度來說, $[x]$ 就是所有和 x 同類的元素所成的集合. 依 reflexive 的定義, 我們知道 $[x]$ 絕對不是空集合, 因為至少 $x \sim x$, 也就是說我們有 $x \in [x]$. 另一方面依定義若 $y \sim x$, 則 $[x] = [y]$. 這是因為, 對任意 $z \in [x]$, 表示 $z \sim x$. 然而又假設 $y \sim x$, 故由 symmetric 及 transitive 得 $z \sim y$, 即 $z \in [y]$. 得證 $[x] \subseteq [y]$. 同理可得 $[y] \subseteq [x]$, 故知 $[y] = [x]$. 另外一方面如果 $y \not\sim x$ (即表示 $(y, x) \notin S$), 則如同前面不同類的集合交集為 $\emptyset$ 的解釋, 我們知 $[y] \cap [x] = \emptyset$. 換言之, 利用 X 上的 equivalence relation $\sim$, 我們可將 X 分成一些互不相交的 equivalence classes 的聯集. 通常我們會用 $X/\sim$ 這個符號表示將 X 利用此 equivalence relation 所分出的 equivalence classes. 簡單來說 $X/\sim$ 就是告訴我們用 $\sim$ 這個關係將 X 分成了哪幾類. 由於這樣的分類將 X 分割成好幾個不相交的 subsets 的聯集, 我們稱此為 X 上的一個 partition, 其正式定義如下.

Definition 4.2.2. 假設 X 為 set, I 為 index set. 若對於任意 $i \in I$, C_i 為 X 的 nonempty subset 且 $X = \bigcup_{i \in I} C_i$ 以及 $C_i \cap C_j = \emptyset$, for $i \neq j$, 則稱此 $\{C_i : i \in I\}$ 為 X 的一個 *partition*.