簡單來說給定一個 X 上的 partition, 就是將 X 上的元素分類. 前面已知道, 給定一個 X 上的 equivalence relation, 考慮此 equivalence relation 所成的 equivalence classes (也就是說將同類的收集起來) 就會是 X 的一個 partition. 現在我們考慮反過來, 若給定 X 上的 partition $X = \bigcup_{i\in I} C_i$, 對於任意 $x,y \in X$, 我們定義 $x \sim y$ 若且唯若 $x,y \in C_i$, for some $i \in I$ (亦即同類的元素視為相關), 則在此定義之下, 我們可得 $\sim$ 是一個 equivalence relation. 這是因為依定義 $X = \bigcup_{i\in I} C_i$, 因此對於任意 $x \in X$, 皆存在 $i \in I$, 使得 $x \in C_i$, 因此得 $x \sim x$ (證得 reflexive). 另外若 $x \sim y$, 表示 $x,y \in C_i$, for some $i \in I$, 當然也有 $y,x \in C_i$, 故得 $y \sim x$ (證得 symmetric). 最後若 $x \sim y$, $y \sim z$, 知存在 $i,j \in I$ 使得 $x,y \in C_i$, $y,z \in C_j$. 由於 $y \in C_i \cap C_j$, 利用若 $i \neq j$ 則 $C_i \cap C_j = \emptyset$ 得知 $i = j$. 亦即 $x,z \in C_i$, 因此得 $x \sim z$ (證得 transitive). 我們得到以下的定理.

Theorem 4.2.3. 假設 X 為 *set.*

(1) 若 $\sim$ 為 X 上的一個 *equivalence relation,* 則 $\{[x] : [x] \in X/\sim\}$ 是 X 的一個 *partition.*

(2) 若 I 為 *index set* 且 $\{C_i : i \in I\}$ 為 X 的一個 *partition,* 對於任意 $x,y \in X$, 定義 $x \sim y$ 若且唯若 $x,y \in C_i$, *for some* $i \in I$, 則 $\sim$ 為 X 上的一個 *equivalence relation.*

Example 4.2.4. 若我們將整數 $\mathbb{Z}$ 分為 2 的倍數所成的集合 $C_1 = \{2n : n \in \mathbb{Z}\}$, 3 的倍數所成的集合 $C_2 = \{3n : n \in \mathbb{Z}\}$ 以及 5 的倍數所成的集合 $C_3 = \{5n : n \in \mathbb{Z}\}$, 則 $\{C_1,C_2,C_3\}$ 不是一個 $\mathbb{Z}$ 的 partition. 因為 7 就不是 2, 3 或是 5 的倍數 (亦即 $7 \notin C_1 \cup C_2 \cup C_3$), 故知 $\mathbb{Z} \neq C_1 \cup C_2 \cup C_3$. 另外 $C_1 \cap C_2 \neq \emptyset$, 例如我們有 $6 \in C_1 \cap C_2$. 同理 $C_1 \cap C_3 \neq \emptyset$, $C_2 \cap C_3 \neq \emptyset$.

若考慮 $\mathbb{Z}$ 的 3 個 subset $C_1 = \{n : n = 3m, m \in \mathbb{Z}\}, C_2 = \{n : n = 3m+1, m \in \mathbb{Z}\}$ 以及 $C_3 = \{n : n = 3m+2, m \in \mathbb{Z}\}$, 則 $\{C_1,C_2,C_3\}$ 是一個 $\mathbb{Z}$ 的 partition. 事實上, 我們可以將 C_1,C_2,C_3 分別看成除以 3 餘數分別為 0, 1 以及 2 的元素所成的集合. 很容易看出 $\mathbb{Z} = C_1 \cup C_2 \cup C_3$, 而且 $C_1 \cap C_2 = C_1 \cap C_3 = C_2 \cap C_3 = \emptyset$. 利用這個 partition, 我們可以定出 $\mathbb{Z}$ 中的一個 equivalence relation 為 $x \sim y$ 若且唯若 $x,y \in C_i$, for some $i \in \{1,2,3\}$. 若 $x,y \in C_1$ 表示 $x = 3m, y = 3m'$ for some $m,m' \in \mathbb{Z}$ 所以 $x - y = 3(m - m')$, 亦即 $3 \mid x - y$ (表示 3 可以整除 $x - y$). 同理當 $x,y \in C_2$ 或 $x,y \in C_3$, 皆有 $3 \mid x - y$. 所以我們知此 equivalence relation 可定義為 $x \sim y$ 若且唯若 $3 \mid x - y$. 很容易檢查 $\sim$ 是 equivalence relation. 首先對所有 $x \in \mathbb{Z}$, 我們有 $3 \mid x - x$, 所以 $x \sim x$. 另外若 $x \sim y$, 表示 $3 \mid x - y$, 故有 $3 \mid -(x - y)$. 因此得 $3 \mid y - x$, 即 $y \sim x$. 最後若 $x \sim y$ 且 $y \sim x$, 表示 $3 \mid x - y$ 且 $3 \mid y - z$. 因此得 $3 \mid (x - y) + (y - z)$, 即 $3 \mid x - z$. 得證 $x \sim z$. 在這裡我們有 $C_1 = [0] = [4]$, $C_2 = [1] = [-3]$ 以及 $C_3 = [2] = [11]...$ 等. 我們有 $\mathbb{Z}/\sim = \{[0],[1],[2]\}$.

Question 4.4. 對於任意正整數 m, 令 $I = \{0,1,\ldots,m-1\}$ 為 *index set.* 考慮 Z 的 *partition,* $C_i = \{mk + i : k \in \mathbb{Z}\}$, $i \in I$. 試問此 *partition* 所對應的 *equivalence relation* 為何?

利用 equivalence relation 將集合分類成 partition 後再利用此分類來探討此集合, 這樣的方法將來大家學習一些數學的理論時會用到. 目前我們僅介紹一個簡單的應用. 就是它可以幫我們計算一個有限集合的個數. 我們有以下的定理.

Proposition 4.2.5. 假設 X 是一個 *finite set,* 且用一個 *equivalence relation* 將其分成 *equivalence classes* $C_1,\ldots,C_n$. 若 $\#(X)$ 及 $\#(C_i)$ 表示這些集合的元素的個數, 則

$$\#(X)=\sum_{i=1}^{n}\#(C_i).$$

Proof. 由前面說明已知當 $i\neq j$ 時, $C_i\cap C_j=\emptyset$. 也就是說這些 C_i 是兩兩不相交的. 再加上每個 X 中的元素都會落在某個 C_i 中, 所以 X 的元素的個數剛好是這些 $C_1,\ldots,C_n$ 的元素個數之和. □

Example 4.2.6. 令 $A=\{1,2,3\}$ 且令 $X=\mathscr{P}(A)$. 考慮 X 上的 relation, 其定義為對任意 $B,C\in X$, $B\sim C$ 若且唯若 $\#(B)=\#(C)$. 很容易看出 $\sim$ 為 X 上的 equivalence relation. 這是因為, 對任意 $B\in X$, 我們有 $\#(B)=\#(B)$, 故知 $B\sim B$. 又若 $B\sim C$, 表示 $\#(B)=\#(C)$, 故由 $\#(C)=\#(B)$, 得 $C\sim B$. 最後若 $B\sim C$ 且 $C\sim D$, 則由 $\#(B)=\#(C)$ 以及 $\#(C)=\#(D)$ 得 $\#(B)=\#(D)$. 故得 $B\sim D$.

利用這個 equivalence relation 所得的 equivalence classes 形成 $X=\mathscr{P}(A)$ 的一個 partition. 我們有以下的 partition:

沒有元素: $\{\emptyset\}$

一個元素: $\{\{1\},\{2\},\{3\}\}$.

二個元素: $\{\{1,2\},\{1,3\},\{2,3\}\}$.

三個元素: $\{\{1,2,3\}\}$.

注意這幾個 equivalence classes 的元素個數分別為 $\binom{3}{0}$, $\binom{3}{1}$, $\binom{3}{2}$, $\binom{3}{3}$. 所以由 Proposition 4.2.5 知

$$\binom{3}{0}+\binom{3}{1}+\binom{3}{2}+\binom{3}{3}=\#(X)=\#(\mathscr{P}(A))=2^3=8.$$

Question 4.5. 令 n 為正整數, $A=\{1,2,\ldots,n\}$ 且令 $X=\mathscr{P}(A)$. 考慮 X 上的 *relation,* 其定義為對任意 $B,C\in X$, $B\sim C$ 若且唯若 $\#(B)=\#(C)$. 若 $m\in\mathbb{N}$ 且 $0<m<n$, 試問 $\{1,2,\ldots,m\}$ 所在的 *equivalence class* 其元素個數為何? 試證明

$$\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\cdots+\binom{n}{n-1}+\binom{n}{n}=2^n.$$

4.3. Order Relation

在數學上另一種常見的 relation 就是所謂 order relation, 亦即排序的關係. 它是一種符合三種性質的 relation, 這類的 relation 和我們習慣的比較大小關係有一致的性質, 因此稱為 order relation.

以下介紹的 relation 由於和比較大小有類似的性質, 大家可以將之視為“小於等於”這樣的關係. 為了讓大家習慣它的性質, 我們不用 $\sim$ 這個符號, 不過不希望誤以為它就是一般的“小於等於”, 所以我們選用“$\preceq$”這個符號.

Definition 4.3.1. 假設 X 為 nonempty set 且 $\preceq$ 為 X 上的 relation. 若 $\preceq$ 符合以下三種性質, 我們便稱 $\preceq$ 為 X 上的 *partial order.*

(1) 對所有 $x \in X$, 皆有 $x \preceq x$.

(2) 若 $x, y \in X$ 滿足 $x \preceq y$ 且 $y \preceq x$, 則 $x = y$.

(3) 若 $x, y, z \in X$ 滿足 $x \preceq y$ 且 $y \preceq z$, 則 $x \preceq z$.

在 Definition 4.3.1 的性質 (1) 我們知道就是 reflexive 性質, 而性質 (3) 就是 transitive 性質. 不過性質 (2) 和 symmetric 性質就差很多了. 它指的是若 $x \neq y$, 則不可能同時會有 $x \preceq y$ 且 $y \preceq x$. 若我們仍用 $S \subseteq X \times X$ 來表示這個 relation, 由於這個性質說的是當 $x \neq y$ 時, (x, y) 和 (y, x) 不可能同時在 S 中, 故我們稱這個性質為 *anti-symmetric.* 當 $\preceq$ 為 X 上的一個 partial order, 一般我們就簡稱 $(X, \preceq)$ 為一個 *poset.*

Example 4.3.2. 假設 A 為 nonempty set, 令 $X = \mathscr{P}(A)$. 考慮 X 上一般集合包含於的 relation $\subseteq$, 則 $(X, \subseteq)$ 就是一個 poset.

Question 4.6. 假設 A 為 *nonempty set,* 令 $X = \mathscr{P}(A)$. 考慮 X 上一般集合的 *relation* $\supseteq$, 則 $(X, \supseteq)$ 是否是一個 *poset?*

Question 4.7. 考慮實數 $\mathbb{R}$ 一般的小於等於關係 $\leq$, 是否 $(\mathbb{R}, \leq)$ 為 *poset?* 又 $(\mathbb{R}, \geq)$ 是否為 *poset?*

在一個 poset $(X, \preceq)$ 中, 若 $x, y \in X$ 滿足 $x \preceq y$ 或 $y \preceq x$, 則稱 x, y 這兩個元素為 *comparable* (意指可以比較). Definition 4.3.1 之所以會稱為 "partial" order, 就是因為它並沒有要求任兩個 X 中的元素都是 comparable. 例如考慮 $A = \{1, 2\}$ 的情形, 我們知 $\subseteq$ 是 $\mathscr{P}(A)$ 上的 partial order. 然而 $\{1\}, \{2\} \in \mathscr{P}(A)$ 並不是 comparable, 因為 $\{1\} \subseteq \{2\}$ 和 $\{2\} \subseteq \{1\}$ 皆不成立. 不過實數 $(\mathbb{R}, \leq)$ 這個 poset 就有任兩個元素皆為 comparable 的性質. 因此我們又特別考慮以下的 order relation.

Definition 4.3.3. 假設 X 為 nonempty set 且 $\preceq$ 為 X 上的 relation. 若 $\preceq$ 符合以下三種性質, 我們便稱 $\preceq$ 為 X 上的 *total order.*

(1) 若 $x, y \in X$ 滿足 $x \preceq y$ 且 $y \preceq x$, 則 $x = y$.

(2) 若 $x, y, z \in X$ 滿足 $x \preceq y$ 且 $y \preceq z$, 則 $x \preceq z$.

(3) 對所有 $x, y \in X$, 皆有 $x \preceq y$ 或 $y \preceq x$.

Definition 4.3.3 的性質 (3) 便是要求任兩個元素皆要 comparable, 這個性質就是 *total* 的性質. 要注意由 (3) 的性質, 便可得到 reflexive, 因為這裡 x, y 沒有要求要相異, 所以依定義, 我們會有 $x \preceq x$. 也因此我們知一個 total order 一定是 partial order (反過來就不一定對). 當 $\preceq$ 為 X 上的 total order, 一般我們就稱 $(X, \preceq)$ 為一個 *total ordered set.* 另外有的書會稱 total order 為 *linear order* 或是 *simple order.*

Question 4.8. 考慮實數 $\mathbb{R}$ 一般的小於關係 $<$, 是否 $(\mathbb{R}, <)$ 為 *total ordered set?*

或許大家會好奇前面談的 order $\preceq$ 都有一個 "等號", 也就是說 $x \preceq x$ 成立的原因是 $x = x$. 那麼是否可以像實數的 $\leq$ 去掉等號得到 $<$ 這樣的 order 呢? 事實上, 如果 $(X, \preceq)$ 是一個 total ordered set, 我們可以定義 $x \prec y$ 若且唯若 $x \preceq y$ 且 $x \neq y$. 在這情況之下, 我們便稱 $\prec$ 為 X 的一個 *strict total order*. 我們有以下的定義.

Definition 4.3.4. 假設 X 為 nonempty set 且 $\prec$ 為 X 上的 relation. 若 $\prec$ 符合以下二種性質, 我們便稱 $\prec$ 為 X 上的 *strict total order*.

(1) 若 $x, y, z \in X$ 滿足 $x \prec y$ 且 $y \prec z$, 則 $x \prec z$.

(2) 對所有 $x, y \in X$, 皆會滿足 $x = y$, $x \prec y$ 或 $y \prec x$ 其中之一, 且其中僅有一個會成立.

在 Definition 4.3.4 中, 性質 (2) 稱為 *trichotomy* (三一律).

Example 4.3.5. 我們可以對所有複數所成的集合 $\mathbb{C}$ 定義一個 strict order. 對任意 $a+bi, c+di \in \mathbb{C}$, 其中 $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ 且 $i^2 = -1$. 我們定義 $(a+bi) \prec (c+di)$ 若且唯若 (1) $a < c$ 或 (2) $a = c$ 且 $b < d$. 此時 $(\mathbb{C}, \prec)$ 便是 strict total ordered set. 首先檢查 transitive 性質. 假設 $a+bi, c+di, e+fi \in \mathbb{C}$ 其中 $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}$ 滿足 $(a+bi) \prec (c+di)$ 且 $(c+di) \prec (e+fi)$. 依 $\prec$ 的定義, 我們知此時 $a \leq c$ 且 $c \leq e$, 因此得 $a \leq e$. 我們可以分成兩種情況討論: (一) 若 $a < e$, 則由 $\prec$ 的定義得 $(a+bi) \prec (e+fi)$; (二) 若 $a = e$, 則可得 $a = c = e$. 此時由 $(a+bi) \prec (c+di)$ 知 $b < d$, 再由 $(c+di) \prec (e+fi)$ 知 $d < f$. 故得 $b < f$, 因此依 $\prec$ 的定義得 $(a+bi) \prec (e+fi)$. 證明了 $\prec$ 符合 transitive 性質. 至於三一律, 若 $a+bi \neq c+di$, 依複數相等的定義知 $a \neq c$ 或 $b \neq c$. 若 $a \neq c$, 依實數的三一律知 $a < c$ 或 $c < a$, 也就是說此時 $(a+bi) \prec (c+di)$ 或 $(c+di) \prec (a+bi)$. 而若 $a = c$, 此時必有 $b \neq d$, 故依然由實數的三一律可得 $(a+bi) \prec (c+di)$ 或 $(c+di) \prec (a+bi)$. 我們證明了任兩複數在 $\prec$ 之下皆為 comparable, 證得了 $\prec$ 有 trichotomy 的性質.

在此定義之下 $(\mathbb{C}, \prec)$ 為 strict total ordered set 且它保持了原本實數上 $<$ 這個 order. 不過為甚麼常聽說複數不能比大小呢? 其實這是簡略的說法. 事實上, 實數和複數它們不只是 sets, 它們的元素之間還有加法及乘法運算. 所以我們在談其上的 order 時其實還多要求了兩個性質. 即在實數的情形我們多了和加法與乘法有關的兩個性質:

A: 若 $a < b$, 則對任意 c 皆有 $a+c < b+c$.

M: 若 $a < b$, 則對任意 $0 < c$ 皆有 $ac < bc$.

很容易驗證剛才定義複數上的 $\prec$ 符合性質 A. 但是它不符合性質 M. 這是因為依定義我們有 $0 \prec i$, 但若性質 M 成立, 則有 $0 \times i \prec i \times i$, 即 $0 \prec -1$. 此與 $\prec$ 之定義不符, 故知 $\prec$ 不符合性質 M.

事實上, 我們可以證明在 $\mathbb{C}$ 上面不可能定義出一個 strict total order $\prec$ 會保持原本實數的大小關係且符合性質 A 和 M. 這是因為若 $(\mathbb{C}, \prec)$ 符合這些要求, 則依三一律, 我們有 $0 \prec i$ 或 $i \prec 0$ 兩種情況會發生. 若 $0 \prec i$, 則由性質 M 會推得 $0 \prec -1$, 不符合原本實數的大小關係. 而若 $i \prec 0$, 則由性質 A 可推得 $i + (-i) \prec 0 + (-i)$, 即 $0 \prec -i$. 此時再由性質 M, 可

推得 $0\times(-i)\prec(-i)\times(-i)$, 即 $0\prec -1$, 同樣的不符合原本實數的大小關係. 因為在 $\mathbb{C}$ 上是不可能存在 strict total order 符合這些性質, 所以我們才簡略的說複數是不能比大小的.

要注意 strict total order 並不是 total order. 但如前面所述, 每一個 total ordered set $(X,\preceq)$, 都可定義一個 strict total order.

Proposition 4.3.6. 假設 $(X,\preceq)$ 是一個 *total ordered set.* 若定義 $x\prec y$ 若且唯若 $x\preceq y$ 且 $x\neq y$, 則在此定義之下, $\prec$ 為 X 的一個 *strict total order.*

Proof. 首先我們證明 transitive 性質, 即若 $x,y,z\in X$ 滿足 $x\prec y$ 且 $y\prec z$, 則要證明 $x\prec z$. 由於 $x\prec y$ 表示 $x\preceq y$ 且 $x\neq y$, 而 $y\prec z$ 表示 $y\preceq z$ 且 $y\neq z$. 故由 $\preceq$ 為 total order 有 transitive 性質, 得 $x\preceq z$. 我們必須證明 $x\neq z$. 利用反證法, 假設 $x=z$, 由 $x\preceq y$ 得 $z\preceq y$. 但又已知 $y\preceq z$, 故由 $\preceq$ 為 total order 有 anti-symmetric 性質, 得 $y=z$. 此與當初假設 $y\prec z$ (即 $y\neq z$) 相矛盾, 故知 $x\neq z$. 得證 $x\prec z$.

接著我們證明 trichotomy 性質. 因 $\preceq$ 為 total order 有 total 性質, 亦即對任意 $x,y\in X$, 我們有 $x\preceq y$ 或 $y\preceq x$. 現若 $x=y$, 我們得 x,y 滿足 $x=y$. 而若 $x\neq y$, 則由 $x\preceq y$ 或 $y\preceq x$, 得 $x\prec y$ 或 $y\prec x$. 得證 x,y 滿足 $x=y$, $x\prec y$ 或 $y\prec x$. 現要說明 x,y 僅能滿足 $x=y$, $x\prec y$ 或 $y\prec x$ 其中之一. 首先若 $x=y$, 依 $\prec$ 之定義我們知不可能 $x\prec y$ 或 $y\prec x$ 成立. 而若 $x\neq y$ 我們用反證法證明不可能 $x\prec y$, $y\prec x$ 兩者皆成立. 假設 $x\prec y$, $y\prec x$ 兩者皆成立, 由 $\prec$ 之定義知 $x\preceq y$ 且 $y\preceq x$. 再次由 anti-symmetric 性質, 得 $x=y$. 此與 $x\neq y$ 之假設相矛盾. 得證不可能 $x\prec y$, $y\prec x$ 兩者皆成立. $\square$

同樣的, 若已知 $\prec$ 為 X 上的 strict total order, 對任意 $x,y\in X$, 我們定義 $x\preceq y$ 若且唯若 $x=y$ 或 $x\prec y$, 則 $\preceq$ 會是 X 上的 total order.

Question 4.9. 假設 X 為 *nonempty set* 且 $\prec$ 為 X 上的 *strict total order.* 若對任意 $x,y\in X$, 我們定義 $x\preceq y$ 若且唯若 $x=y$ 或 $x\prec y$, 試證明 $\preceq$ 會是 X 上的 *total order.*

從這裡, 我們知道給了 X 上一個 total order 就等同於給了一個 strict total order, 反之亦然. 所以當談論到 total order 的性質, 我們都可以轉換成 strict total order 的性質. 為了方便起見, 當我們用 $\preceq$ 表示一個 total order, 則會用 $\prec$ 表示其對應的 strict total order, 反之亦然.

有了 order 的關係後, 我們就可以定義所謂的上下界, 最大最小元素. 假設 $(X,\preceq)$ 為 poset. 對於 X 中的非空子集 T, 我們說 $u\in X$ 是 T 的一個 *upper bound*, 表示對於任意 T 中的元素 t 皆滿足 $t\preceq u$. 假設 $u\in X$ 是 T 的 upper bound 且對任意 T 的 upper bound u', 皆滿足 $u\preceq u'$, 則稱 u 為 T 的 *least upper bound* (或 *supremum*). 相對應的, 我們稱 $l\in X$ 為 T 的一個 *lower bound*, 表示對於任意 T 中的元素 t 皆滿足 $l\preceq t$. 假設 $l\in X$ 是 T 的 lower bound 且對任意 T 的 lower bound l', 皆滿足 $l'\preceq l$, 則稱 l 為 T 的 *greatest lower bound* (或 *infimum*).

要注意, 一般來說 poset $(X,\preceq)$ 的 nonempty subset 未必會有 upper bound 或 lower bound. 而即使有 upper bound 或 lower bound, 仍有可能 least upper bound 或 greatest lower bound 會不存在. 我們看以下的例子:

Example 4.3.7. (A) 考慮 $(\mathbb{R},\leq)$ 這個 total ordered set. 令 $T=\{x\in\mathbb{R}:0<x<1\}$. 所有大於等於 1 的實數都是 T 的 upper bound, 而 1 是 T 的 least upper bound. 所有小於等於 0 的實數都是 T 的 lower bound, 而 0 是 T 的 greatest lower bound. 至於 $\{x\in\mathbb{R}:x\geq 0\}$, 則無 upper bound. 而 $\{x\in\mathbb{R}:x<1\}$, 則無 lower bound.

(B) 考慮 $(\mathbb{Q},\leq)$ 這個 total ordered set. 令 $T=\{x\in\mathbb{Q}:\sqrt{2}<x<\sqrt{3}\}$. 所有大於 $\sqrt{3}$ 的有理數都是 T 的 upper bound, 而所有小於 $\sqrt{2}$ 的有理數都是 T 的 lower bound. 但是 T 沒有 least upper bound. 這是因為若 $u\in\mathbb{Q}$ 為 T 的 least upper bound, 表示 $\sqrt{3}<u$, 但 $\sqrt{3}$ 和 u 之間仍存在著有理數 (這是有理述的稠密性), 也就是說存在 $u'\in\mathbb{Q}$ 滿足 $\sqrt{3}<u'<u$. 既然 u' 為 T 的 upper bound 但又小於 u, 此與 u 為 T 的 least upper bound 相矛盾, 故知 T 沒有 least upper bound. 同理我們知 T 沒有 greatest lower bound.

(C) 給定 nonempty set A, 考慮 $(\mathscr{P}(A),\subseteq)$ 這個 poset. 對於任意 $\mathscr{P}(A)$ 的 nonempty subset $\mathscr{T}$, A 是 $\mathscr{T}$ 的 upper bound, 因為對任何 $B\in\mathscr{T}$, 皆有 $B\subseteq A$. 同理 $\emptyset$ 為 $\mathscr{T}$ 的 lower bound. 此時 $\mathscr{T}$ 的 least upper bound 一定存在, 事實上 $U=\bigcup_{B\in\mathscr{T}}B$ 會是 $\mathscr{T}$ 的 least upper bound. 這是因為對任意 $B\in\mathscr{T}$, 皆有 $B\subseteq U$, 所以 U 是 $\mathscr{T}$ 的 upper bound. 而若 $U'\in\mathscr{P}(A)$ 是 $\mathscr{T}$ 的 upper bound, 表示對任意 $B\in\mathscr{T}$, 皆有 $B\subseteq U'$, 故由 Corollary 3.3.4, 知 $U=\bigcup_{B\in\mathscr{T}}B\subseteq U'$. 得證 $U=\bigcup_{B\in\mathscr{T}}B$ 會是 $\mathscr{T}$ 的 least upper bound. 例如 $A=\{1,2,3,4\}$ 的情形, 考慮 $\mathscr{T}=\{\{1,2\},\{1,3\}\}$. 則 $\{1,2\}\cup\{1,3\}=\{1,2,3\}$ 就是 $\mathscr{T}$ 的 least upper bound.

Question 4.10. 給定 *nonempty set* A, 考慮 $(\mathscr{P}(A),\subseteq)$ 這個 *poset*. 對於任意 $\mathscr{P}(A)$ 的 *nonempty subset* $\mathscr{T}$, 試證明 $\mathscr{T}$ 的 *greatest lower bound* 存在.

要注意, 一般來說對於 poset $(X,\preceq)$ 的 nonempty subset T, 雖然其 least upper bound 可能不存在, 不過若存在的話它會是唯一的. 這是因為如果 $u,u'\in X$ 皆為 T 的 least upper bound, 則由 u 為 least upper bound 且 u' 為 upper bound, 得 $u\preceq u'$. 同理可得 $u'\preceq u$, 故由 partial order 的 anti-symmetric 性質得 $u=u'$. 同樣的 T 的 greatest lower bound 若存在的話, 也會是唯一的. 所以我們有以下性質.

Proposition 4.3.8. 假設 $(X,\preceq)$ 是 *partial ordered set* 且 T 是 X 的 *nonempty subset.* 若 T 的 *least upper bound* 存在, 則唯一. 而若 T 的 *greatest lower bound* 存在, 也會是唯一的.

當 T 的 least upper bound 存在時，由於是唯一的，我們就用 $\sup(T)$ 表示之。同理，我們會用 $\inf(T)$ 表示 T 的 greatest lower bound.

當 $(X,\preceq)$ 是 total ordered set 時, least upper bound 和 greatest lower bound 除了唯一性外還有一個重要的性質. 依定義若 $u\in X$ 是 T 的 least upper bound, 表示如果 $x\prec u$, 則 x 不可能是 T 的 upper bound. 這是因為若 x 是 T 的 upper bound 則會得到 $u\preceq x$ 之矛盾

(注意 $\prec$ 是 strict total order, 所以依三一律, $x \prec u$ 和 $u \preceq x$ 不可能同時成立). 我們有以下之結論.

Proposition 4.3.9. 假設 $(X,\preceq)$ 是 *total ordered set,* T 是 X 的 *nonempty subset* 且 $u \in X$ 是 T 的 *least upper bound.* 若 $x \in X$ 滿足 $x \prec u$, 則存在 $t \in T$ 滿足 $x \prec t$.

Proof. 利用反證法, 假設存在 $t \in T$ 滿足 $x \prec t$ 是錯的, 表示所有的 $t \in T$ 都不滿足 $x \prec t$. 然而 $\prec$ 是 X 的 strict total order, 依三一律知, $x \prec t$, $t \prec x$ 和 $x = t$ 必有一項是對的. 因此對所有 $t \in T$ 都不滿足 $x \prec t$ 表示對所有 $t \in T$ 都滿足 $t \preceq x$. 也就是說 x 會是 T 的 upper bound. 但依假設 u 是 T 的 least upper bound, 我們得 $u \preceq x$. 由三一律知此與 $x \prec u$ 之前提相矛盾. 故得證存在 $t \in T$ 滿足 $x \prec t$. □

Question 4.11. 假設 $(X,\preceq)$ 是 *total ordered set,* T 是 X 的 *nonempty subset* 且 $l \in X$ 是 T 的 *greatest lower bound.* 試證明若 $x \in X$ 滿足 $l \prec x$, 則存在 $t \in T$ 滿足 $t \prec x$.

接下來我們介紹 poset $(X,\preceq)$ 中的 nonempty subset T 的最大最小元素. 要注意, 在 poset 中的最大最小元素其實有分兩種. 由於 poset 中未必任兩個元素是 comparable, 所以一種 T 的最大元素, 稱為 *maximal element* of T, 指的是在 T 中沒有其他元素比它大的元素. 也就是說若 $\mu \in T$ 且不存在 $t \in T$ 滿足 $\mu \prec t$, 則稱 μ 為 T 的 maximal element. 這也等同於說如果 $t \in T$ 滿足 $\mu \preceq t$, 則 $\mu = t$. 另一種最大元素, 稱為 *greatest element* of T (或稱 *maximum element*), 指的是所有 T 中的元素都比它小. 也就是說若 $g \in T$ 且對所有 $t \in T$ 皆滿足 $t \preceq g$, 則稱 g 為 T 的 greatest element. 至於最小元素也有相對的定義. 若 $m \in T$ 且不存在 $t \in T$ 滿足 $t \prec m$, 則稱 m 為 T 的 *minimal element.* 而若 $l \in T$ 且對所有 $t \in T$ 皆滿足 $l \preceq t$, 則稱 l 為 T 的 *least element* (或稱 *minimum element*). 要特別注意的是, T 的 upper bound 和 lower bound 不需要是 T 的元素, 但 T 的 maximal element, greatest element 以及 minimal element, least element 皆要求是 T 的元素. 如同 upper bound 和 lower bound, 上述這幾種最大最小元素, 並不一定會存在. 我們看以下的例子.

Example 4.3.10. (A) 考慮 $(\mathbb{R},\leq)$ 這個 total ordered set. 令 $T = \{x \in \mathbb{R} : 0 < x < 1\}$. 很容易看出 T 沒有 maximal element. 這是因為對任意 $\mu \in T$ 皆有 $0 < \mu < 1$, 所以若令 $t = (\mu+1)/2$, 則有 $0 < t < 1$, 亦即 $t \in T$ 且 $\mu < t$. 得證 T 沒有 maximal element. 同理 T 也沒有 minimal element. 另一方面若考慮 $T' = \{x \in \mathbb{R} : 0 \leq x \leq 1\}$. 很容易看出 1 是 T' 的 maximal element 也是 greatest element, 而 0 是 T' 的 minimal element 也是 least element.

(B) 考慮 $A = \{1,2,3\}$ 以及 $(\mathscr{P}(A),\subseteq)$ 這個 poset. 考慮 $\mathscr{T} = \{\{1\},\{1,2\},\{2,3\},\{1,2,3\}\}$. 則 $\{1,2,3\}$ 是 $\mathscr{T}$ 的 maximal element 也是 greatest element. 而 $\{1\}$ 是 $\mathscr{T}$ 的 minimal element 因為找不到 $B \in \mathscr{T}$ 會滿足 $B \subset \{1\}$. 不過 $\{1\}$ 不是 $\mathscr{T}$ 的 least element, 因為 $\{2,3\} \in \mathscr{T}$ 但是 $\{1\}$ 不滿足 $\{1\} \subseteq \{2,3\}$. 另外 $\{2,3\}$ 也是 $\mathscr{T}$ 的 minimal element, 因為我們也找不到 $B \in \mathscr{T}$ 會滿足 $B \subset \{2,3\}$. 另外若考慮 $\mathscr{T}' = \{\{1\},\{1,2\},\{2,3\}\}$. 則 $\mathscr{T}'$ 就沒有 greatest element, 而 $\{1,2\}$ 和 $\{2,3\}$ 都是 $\mathscr{T}'$ 的 maximal element. 要注意的是在這情況之下 $\{2,3\}$ 同時是 $\mathscr{T}'$ 的 maximal element 以及 minimal element.

從 Example 4.3.10 我們知道 maximal element 和 minimal element 有可能不唯一. 不過 greatest element 和 least element 若存在的話, 會是唯一的. 事實上我們有以下之結果.

Proposition 4.3.11. 假設 $(X,\preceq)$ 為 *poset,* T 為其 *nonempty subset* 且假設 T 的 *greatest element* 存在. 則 T 的 *greatest element* 為唯一. 又此時 T 的 *maximal element* 會存在且唯一, 事實上 T 的 *maximal element* 就是 T 的 *greatest element,* 也是 T 的 *least upper bound.*

Proof. 首先利用反證法, 證明 greatest element 的唯一性. 假設 $g,g' \in T$ 皆為 T 的 greatest element 且 $g \neq g'$. 由於 $g' \in T$ 且 g 為 T 的 greatest element, 依定義我們有 $g' \preceq g$. 同理知 $g \preceq g'$. 由於 $\preceq$ 為 partial order 具有 anti-symmetric 性質, 由 $g' \preceq g$ 以及 $g \preceq g'$ 得 $g = g'$ 之矛盾. 得證唯一性.

現假設 $g \in T$ 為 T 的 greatest element. 若 $t \in T$ 滿足 $g \preceq t$, 則由 reflexive 性質得 $g = t$. 換言之, 不可能存在 $t \in T$ 滿足 $g \prec t$. 得知 g 為 T 的 maximal element. 證得 T 的 maximal element 是存在的. 現若 $\mu \in T$ 為 T 的 maximal element. 由 $\mu \in T$, 知 $\mu \preceq g$. 然而依 maximal element 的定義以及 $g \in T$ 知不可能有 $\mu \prec g$ 的情形發生, 故得 $\mu = g$. 我們證明了 T 的 maximal element 一定就是 T 的 greatest element g, 也同時證得了 T 的 maximal element 的唯一性.

依 greatest element 的定義, 對所有 $t \in T$ 皆有 $t \preceq g$, 因此 g 是 T 的 upper bound. 現對任意 T 的 upper bound u, 由於 $g \in T$, 依 upper bound 的定義, 我們有 $g \preceq u$, 得證 g 是 T 的 least upper bound. $\square$

Question 4.12. 假設 $(X,\preceq)$ 為 *poset,* T 為其 *nonempty subset* 且假設 T 的 *least element* 存在. 試證明 T 的 *least element* 為唯一, 且此時 T 的 *minimal element* 會存在且唯一. 並證明 T 的 *minimal element* 就是 T 的 *least element,* 也是 T 的 *greatest lower bound.*

Question 4.13. 假設 $(X,\preceq)$ 為 *poset* 且 T 為其 *nonempty subset.* 試證明 T 的 *least upper bound* u 存在且 $u \in T$ 若且唯若 T 的 *greatest element* 存在. 同樣的, 試證明 T 的 *greatest lower bound* l 存在且 $l \in T$ 若且唯若 T 的 *least element* 存在.

假設 $(X,\preceq)$ 為 poset, T 為其 nonempty subset, 從 Proposition 4.3.11 以及 Question 4.12 我們知道當 T 有 greatest element 時 T 的 maximal element 就是 greatest element, 而當 T 有 least element 時 T 的 minimal element 就是 least element. 其實只有當 $(X,\preceq)$ 是 partial ordered set 不是 total ordered set 時, 因為並不是任兩元素是 comparable 才需區分 maximal element 和 greatest element 以及區分 minimal element 和 least element. 事實上當 $(X,\preceq)$ 是 total ordered set 時 maximal element 和 greatest element 是一致的, 同樣的 minimal element 和 least element 也是一致的.

Proposition 4.3.12. 假設 $(X,\preceq)$ 為 *total ordered set,* T 為其 *nonempty subset.* 若 T 的 *maximal element* 存在, 則 T 的 *maximal element* 就是 T 的 *greatest element.*

Proof. 假設 $\mu \in T$ 為 T 的 maximal element. 由於對任意 $t \in T$, $\mu \prec t$ 皆不成立, 故由三一律知 $t \preceq \mu$. 得證 μ 為 T 的 greatest element. $\square$

Question 4.14. 假設 $(X,\preceq)$ 為 *total ordered set*, T 為其 *nonempty subset.* 試證明若 T 的 *minimal element* 存在, 則 T 的 *minimal element* 就是 T 的 *least element.*

我們利用下表讓大家更清楚這些定義：

名稱	需要在 T	性質	附註
$g=$ greatest element of T	yes	$\forall t\in T,\, t\preceq g$	g 存在則 $g=\mu$
$\mu=$ maximal element of T	yes	$(\lambda\in T)\wedge(\mu\preceq\lambda)\Rightarrow\lambda=\mu$	μ 存在且為 total order 則 $\mu=g$
$u=$ upper bound of T	no	$\forall t\in T,\, t\preceq u$	g 存在則 $g=\sup(T)$
$\ell=$ least element of T	yes	$\forall t\in T,\, \ell\preceq t$	ℓ 存在則 $\ell=m$
$m=$ minimal element of T	yes	$(\lambda\in T)\wedge(\lambda\preceq m)\Rightarrow\lambda=m$	m 存在且為 total order 則 $m=\ell$
$l=$ lower bound of T	no	$\forall t\in T,\, l\preceq t$	ℓ 存在則 $\ell=\inf(T)$

最後我們再定義一個重要的名詞, 就是所謂的 well order, 其定義如下.

Definition 4.3.13. 假設 $(X,\preceq)$ 為 total ordered set. 若對任意 X 的 nonempty subset T 其 least element 皆存在, 則稱 $(X,\preceq)$ 為 *well-ordered set.*

例如對於所有正整數所成的集合, 在一般的大小關係之下就是 well-ordered set. 但所有整數所成的集合, 在一般的大小關係之下就不是 well-ordered set. 因為例如所有的負整數所成的集合就沒有 least element.

在數學上當我們要處理有無窮多元素的集合時, 我們常會用所謂的 *Well-ordering Theorem* 來處理. 這個定理是說對每一個 nonempty set X, 我們都可以找到一個 total order $\preceq$ 使得 $(X,\preceq)$ 為 well-ordered set.

Example 4.3.14. 對於所有整數所成的集合 $\mathbb{Z}$, 雖然在一般的大小關係之下不是 well-ordered set. 我們可以找到一個 total order $\preceq$ 使得 $(\mathbb{Z},\preceq)$ 為 well-ordered set. 考慮以下的 relation: 當 $a,b\in\mathbb{Z}$, 定義 $a\preceq b$ 若且唯若 (1) $|a|<|b|$ 或 (2) $|a|=|b|$ 且 $a\leq b$. 在此定義之下 $(\mathbb{Z},\preceq)$ 為 total ordered set. 因為若 $a\preceq b$ 且 $b\preceq a$, 表示 $|a|=|b|$ (因 $|a|<|b|$ 和 $|b|<|a|$ 不可能同時成立) 以及 $a\leq b$ 且 $b\leq a$, 得證 $a=b$, 即 $\preceq$ 具有 anti-symmetric 性質. 又若 $a\preceq b$ 且 $b\preceq c$, 表示 $|a|\leq|b|$ 且 $|b|\leq|c|$, 故得 $|a|\leq|c|$. 現若 $|a|<|c|$ 可得 $a\preceq c$. 而若 $|a|=|c|$, 我們當然有 $|a|=|b|$, 故由 $a\preceq b$ 之假設得 $a\leq b$. 又因 $|b|=|c|$, 故由 $b\preceq c$ 之假設得 $b\leq c$. 依此得證當 $|a|=|c|$ 時可得 $a\leq c$, 也就是說 $a\preceq c$. 證得了 $\preceq$ 具有 transitive 性質. 至於 total 性質, 任意 $a,b\in\mathbb{Z}$ 我們可以比較 $|a|,|b|$ 的大小, 而若 $|a|=|b|$, 我們都可比較 a,b 的大小, 所以任意 $a,b\in\mathbb{Z}$ 皆為 comparable, 故 $\preceq$ 具有 total 性質. 事實上依此定義, 我們所得的整數排序方法為

$$0\prec-1\prec1\prec-2\prec2\cdots.$$

我們要說明 $(\mathbb{Z},\preceq)$ 此 total ordered set 為 well-ordered set. 對於任意 $\mathbb{Z}$ 的 nonempty subset T, 我們先選取 T 中絕對值最小的元素. 若絕對值最小的元素僅有一個, 則依 $\preceq$ 的定義此為 T 的 least element. 而若絕對值最小的元素有兩個, 則取原本為負的那一個便是 T 的 least element. 即在 $\preceq$ 這個 order 之下, T 有 least element. 得證 $(\mathbb{Z},\preceq)$ 為 well-ordered set.

Question 4.15. 考慮 $\mathbb{Z}$ 中以下的 *relation:* 對於任意 $a, b \in \mathbb{Z}$ 定義 $a \preceq b$ 若且唯若 *(1)* $ab \geq 0$ 且 $|a| \leq |b|$ 或 *(2)* $ab < 0$ 且 $a \leq b$. 也就是說依此定義所得的整數排序方法為

$$0 \prec -1 \prec -2 \prec -3 \cdots \prec 1 \prec 2 \prec 3 \cdots .$$

試證明在此定義之下 $(\mathbb{Z}, \preceq)$ 為 *total ordered set.* 是否此時 $(\mathbb{Z}, \preceq)$ 為 *well-ordered set?*

Well-ordering Theorem 和所謂 *Zorn's Lemma* 以及 *Axiom of Choice* 是等價的, 等以後我們介紹完 function 的概念後會詳細討論.