5.2. Image and Inverse Image

前面提過一個函數的對應域並沒有明確的指出該函數所能產生的元素有哪些, 所以我們有興趣知道該函數所產生的元素有哪些. 同樣的我們也有興趣知道函數限制在某個非空子集所能產生的元素, 所以引進了 image 的概念. 反過來說, 對於對應域的非空子集, 我們也對於定義域裡有哪些元素可以產生此子集的元素有興趣, 因此引進了 inverse image 的概念. 在以後的數學課程裡, image 和 inverse image 都是用來了解一個函數經常討論的課題.

簡單來說, 給定一個 function $f:X\to Y$ 以及 X 的 subset A, 所謂 A 在 f 的作用之下所得 image 就是收集 A 中的元素代入 f 後所得元素的集合. 我們有以下的定義.

Definition 5.2.1. 假設 $f:X\to Y$ 為 function 且 $A\subseteq X$. 定義 $f(A)=\{f(a):a\in A\}$, 且稱 $f(A)$ 為 the *image* of A under f. 特別的, the image of X under f, 即 $f(X)$ 稱為 f 的 *range* (值域).

從 $f(A)$ 的定義, 我們知道 $f(A)$ 是對應域 Y 的 subset. 這個定義很直接, 很容易讓人理解這個元素的組成元素. 不過它卻不容易掌握, 主要是很難描繪其元素 (請參閱以下 Example 5.2.2). 另外要注意的是, 有的同學可能會誤解 $f(a)\in f(A)$ 表示 $a\in A$. 其實這在邏輯上是錯誤的, 因為有可能有元素 $b\not\in A$ 但是 $f(b)\in f(A)$. 一個比較好的寫法是, 直接將 $f(A)$ 裡的元素看成是 Y 中的元素. 也就是考慮 $y\in f(A)$, 表示存在 $a\in A$ 使得 $y=f(a)$. 反之, 若 $y\in A$ 且存在 $a\in A$ 使得 $y=f(a)$ 依定義就表示 $y\in f(A)$. 所以 $f(A)$ 有另一個等價的定義是

$$f(A)=\{y\in Y:\exists a\in A, y=f(a)\}.$$

這個定義感覺較不自然, 不過反而比較容易讓我們掌握 $f(A)$ 的元素. 我們看以下的例子.

Example 5.2.2. 令 $X=\mathbb{R}\setminus\{3\}$, 且 $f:X\to\mathbb{R}$ 定義為 $f(x)=(x+1)/(x-3)$, $\forall x\in X$. 很容易檢查, f 為 well-defined function. 我們要找出 f 的 range, 即 $f(X)$. 若直接用定義, 我們有 $f(X)=\{(x+1)/(x-3):x\in X\}$, 很難讓我們知道 $f(X)$ 中到底有那些元素. 不過若用另一個等價定義, 對於任意 $y\in f(X)$, 表示 $y\in\mathbb{R}$ 且存在 $x\in X$ 使得 $y=f(x)=(x+1)/(x-3)$. 也就是說 y 這個實數, 會使得方程式 $y=(x+1)/(x-3)$ 在 X 中有解. 注意此時 y 是實數, x 是未知數, 所以利用 $y(x-3)=x+1$ 可得 $(y-1)x=3y+1$, 解得 $x=(3y+1)/(y-1)$. 要注意, 這個推演過程告訴我們的是, 若 $y\in\mathbb{R}$ 且存在 $x\in X$ 使得 $y=(x+1)/(x-3)$, 則 $x=(3y+1)/(y-1)$. 所以它僅告訴我們 x 可能的值, 並不保證 x 必定存在. 因此我們須代回驗證這樣的 x 確實可得 $f(x)=y$.

首先由 $x=(3y+1)/(y-1)$, 我們可知 $y\neq 1$. 事實上如果 $y=1$, 則由假設存在 $x\in X$ 滿足 $1=(x+1)/(x-3)$, 會得到 $x+1=x-3$, 即 $1=-3$ 之矛盾. 現假設 $y\neq 1$, 則當 $x=(3y+1)/(y-1)$, 我們有

$$\frac{x+1}{x-3}=\frac{\frac{3y+1}{y-1}+1}{\frac{3y+1}{y-1}-3}=\frac{\frac{4y}{y-1}}{\frac{4}{y-1}}=\frac{4y}{4}=y.$$

也就是說, 當 $y\neq 1$ 時, 確實存在 $x=(3y+1)/(y-1)\in\mathbb{R}$ 使得 $(x+1)/(x-3)=y$. 我們要確認此時 $x\neq 3$, 才能確定 $x\in X$. 然而若 $x=(3y+1)/(y-1)=3$, 表示 $3y+1=3y-3$, 即

得 $1=-3$ 之矛盾, 故知 $x\in X$. 我們證得了, 當 $y\neq 1$ 時, 存在 $x\in X$ 使得 $y=f(x)$. 又知當 $y=1$ 時不可能找到 $x\in X$ 使得 $y=f(x)$. 因此得 $f(X)=\mathbb{R}\setminus\{1\}$.

接下來, 我們探討有關 image 的性質.

Lemma 5.2.3. 假設 $f:X\to Y$ 為 *function* 且 A,B 為 X 的 *subsets.* 若 $A\subseteq B$, 則 $f(A)\subseteq f(B)$.

Proof. 依定義, 若 $y\in f(A)$, 表示存在 $a\in A$, 使得 $y=f(a)$. 此時因 $A\subseteq B$, 我們有 $a\in B$. 也就是此時考慮 $a\in B$ 會使得 $y=f(a)$, 故 $y\in f(B)$. 得證 $f(A)\subseteq f(B)$. $\square$

現若考慮 X 任意兩個 subsets A,B, 我們有 $A\subseteq A\cup B$ 且 $B\subseteq A\cup B$. 故利用 Lemma 5.2.3, 可得 $f(A)\subseteq f(A\cup B)$ 且 $f(B)\subseteq f(A\cup B)$. 因此由 Corollary 3.2.4, 得 $f(A)\cup f(B)\subseteq f(A\cup B)$. 反之, 若 $y\in f(A\cup B)$, 表示存在 $x\in A\cup B$, 使得 $y=f(x)$. 此時, 若 $x\in A$, 則得 $y=f(x)\in f(A)$, 而若 $x\in B$, 則得 $y=f(x)\in f(B)$. 因此得 $y\in f(A)$ 或 $y\in f(B)$. 此即表示 $y\in f(A)\cup f(B)$, 得證 $f(A\cup B)\subseteq f(A)\cup f(B)$. 因此我們推得了以下性質.

Proposition 5.2.4. 假設 $f:X\to Y$ 為 *function* 且 A,B 為 X 的 *subsets.* 則

$$f(A)\cup f(B)=f(A\cup B).$$

至於交集, 由於 $A\cap B\subseteq A$ 以及 $A\cap B\subseteq B$, 因此由 Lemma 5.2.3, 可得 $f(A\cap B)\subseteq f(A)$ 以及 $f(A\cap B)\subseteq f(B)$. 故由 Corollary 3.2.4, 得 $f(A\cap B)\subseteq f(A)\cap f(B)$. 不過要注意 $f(A)\cap f(B)$ 並不一定包含於 $f(A\cap B)$. 因為若 $y\in f(A)\cap f(B)$, 表示 $y\in f(A)$ 且 $y\in f(B)$, 亦即存在 $a\in A$ 以及 $b\in B$ 滿足 $y=f(a)$ 及 $y=f(b)$. 但這並不表示 $a=b$, 因此我們無法推得 $a\in A\cap B$. 例如考慮函數 $f:\{1,2\}\to\{0\}$ 定義為 $f(1)=f(2)=0$. 若令 $A=\{1\}$, $B=\{2\}$, 我們有 $A\cap B=\emptyset$, 故 $f(A\cap B)=\emptyset$. 但 $f(A)=f(B)=\{0\}$ 因此 $f(A)\cap f(B)=\{0\}$. 由此例知 $f(A)\cap f(B)$ 有可能不包含於 $f(A\cap B)$. 不過 $f(A\cap B)\subseteq f(A)\cap f(B)$ 永遠是對的.

對於差集, 我們要考慮的是 $f(A\setminus B)$ 和 $f(A)\setminus f(B)$ 的關係. 首先若 $y\in f(A)\setminus f(B)$, 表示存在 $a\in A$ 使得 $y=f(a)$ 但 $y\notin f(B)$. 現若 $a\in B$, 會造成 $y=f(a)\in f(B)$ 之矛盾. 故知 $a\in A\setminus B$, 即 $y=f(a)\in f(A\setminus B)$. 得證 $f(A)\setminus f(B)\subseteq f(A\setminus B)$. 不過反過來並不成立, 因為若 $y\in f(A\setminus B)$, 表示存在 $a\in A\setminus B$. 因為 $(A\setminus B)\subseteq A$, 我們當然有 $f(a)\in f(A)$. 但 $a\notin B$, 並不表示 $y=f(a)\notin f(B)$, 因為很有可能存在 $b\in B$ 滿足 $f(a)=f(b)$. 例如前面 $f:\{1,2\}\to\{0\}$ 定義為 $f(1)=f(2)=0$ 的例子. 若令 $A=\{1\},B=\{2\}$, 我們有 $A\setminus B=A$, 因此有 $f(A\setminus B)=f(A)=\{0\}$. 但 $f(A)=f(B)=\{0\}$, 所以 $f(A)\setminus f(B)=\emptyset$. 由此例知 $f(A\setminus B)$ 有可能不包含於 $f(A)\setminus f(B)$. 不過 $f(A)\setminus f(B)\subseteq f(A\setminus B)$ 永遠是對的.

Question 5.3. 假設 X 為宇集, $A\subseteq X$ 且 $f:X\to X$ 為 *function.* 試問 $f(A^c)\subseteq f(A)^c$ 是否成立? 又 $f(A)^c\subseteq f(A^c)$ 是否成立?

接下來, 我們來探討所謂的 inverse image. 簡單來說, 給定一個 function $f:X\to Y$ 以及 Y 的 subset C, 所謂 C 在 f 的作用之下所得 inverse image 就是收集那些經由 f 會落在 C 中的元素所成的集合. 我們有以下的定義.

Definition 5.2.5. 假設 $f: X \to Y$ 為 function 且 $C \subseteq Y$. 定義 $f^{-1}(C) = \{x \in X : f(x) \in C\}$, 且稱 $f^{-1}(C)$ 為 the *inverse image* of C under f.

從 $f^{-1}(C)$ 的定義, 我們知道 $f^{-1}(C)$ 是定義域 X 的 subset. 這個 inverse image 的定義已充分描繪其元素, 所以我們可以直接利用這個定義處理 inverse image 的性質. 以下的定理, 我們會發現, inverse image 比起 image 更能保持集合之間的運算關係.

Proposition 5.2.6. 假設 $f: X \to Y$ 為 *function* 且 C, D 為 Y 的 *subsets.*

(1) 若 $C \subseteq D$, 則 $f^{-1}(C) \subseteq f^{-1}(D)$.

(2) $f^{-1}(C \cup D) = f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D)$.

(3) $f^{-1}(C \cap D) = f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D)$.

(4) $f^{-1}(C \setminus D) = f^{-1}(C) \setminus f^{-1}(D)$.

Proof. (1) 假設 $x \in f^{-1}(C)$, 表示 $f(x) \in C$. 故由 $C \subseteq D$, 得 $f(x) \in D$, 亦即 $x \in f^{-1}(D)$. 得證 $f^{-1}(C) \subseteq f^{-1}(D)$.

(2) 由於 $C \subseteq C \cup D$ 且 $D \subseteq C \cup D$, 故由 (1) 知 $f^{-1}(C) \subseteq f^{-1}(C \cup D)$ 且 $f^{-1}(D) \subseteq f^{-1}(C \cup D)$. 因此由 Corollary 3.2.4 可得 $f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D) \subseteq f^{-1}(C \cup D)$. 反之, 假設 $x \in f^{-1}(C \cup D)$, 表示 $f(x) \in C \cup D$, 亦即 $f(x) \in C$ 或 $f(x) \in D$. 依定義得 $x \in f^{-1}(C)$ 或 $x \in f^{-1}(D)$, 也就是說 $x \in f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D)$. 證明了 $f^{-1}(C \cup D) \subseteq f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D)$, 也因此證得 $f^{-1}(C \cup D) = f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D)$.

(3) 由於 $C \cap D \subseteq C$ 且 $C \cap D \subseteq D$, 故由 (1) 知 $f^{-1}(C \cap D) \subseteq f^{-1}(C)$ 且 $f^{-1}(C \cap D) \subseteq f^{-1}(D)$. 因此由 Corollary 3.2.4 可得 $f^{-1}(C \cap D) \subseteq f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D)$. 反之, 假設 $x \in f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D)$, 表示 $x \in f^{-1}(C)$ 且 $x \in f^{-1}(D)$, 亦即 $f(x) \in C$ 且 $f(x) \in D$. 因此得 $f(x) \in C \cap D$, 依定義即為 $x \in f^{-1}(C \cap D)$. 證明了 $f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D) \subseteq f^{-1}(C \cap D)$, 也因此證得 $f^{-1}(C \cap D) = f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D)$.

(4) 假設 $x \in f^{-1}(C \setminus D)$, 表示 $f(x) \in C \setminus D$, 亦即 $f(x) \in C$ 且 $f(x) \notin D$. 得知 $x \in f^{-1}(C)$. 現若又 $x \in f^{-1}(D)$, 表示 $f(x) \in D$, 此與前面 $f(x) \notin D$ 相矛盾, 故知 $x \notin f^{-1}(D)$. 由 $x \in f^{-1}(C)$ 且 $x \notin f^{-1}(D)$, 我們得 $x \in f^{-1}(C) \setminus f^{-1}(D)$. 得證 $f^{-1}(C \setminus D) \subseteq f^{-1}(C) \setminus f^{-1}(D)$. 反之, 假設 $x \in f^{-1}(C) \setminus f^{-1}(D)$, 表示 $x \in f^{-1}(C)$ 且 $x \notin f^{-1}(D)$. 得知 $f(x) \in C$. 現若又 $f(x) \in D$, 表示 $x \in f^{-1}(D)$, 此與前面 $x \notin f^{-1}(D)$ 相矛盾, 故知 $f(x) \notin D$. 由 $f(x) \in C$ 且 $f(x) \notin D$, 我們得 $f(x) \in C \setminus D$, 即 $x \in f^{-1}(C \setminus D)$. 得證 $f^{-1}(C) \setminus f^{-1}(D) \subseteq f^{-1}(C \setminus D)$, 也因此證明了 $f^{-1}(C \setminus D) = f^{-1}(C) \setminus f^{-1}(D)$. □

Question 5.4. 假設 X 為宇集, $A \subseteq X$ 且 $f: X \to X$ 為 *function.* 試問 $f^{-1}(A^c) \subseteq (f^{-1}(A))^c$ 是否成立? 又 $(f^{-1}(A))^c \subseteq f^{-1}(A^c)$ 是否成立?

當 $f: X \to Y$ 為 function 且 A 為 X 的 subset 時, 既然 $f(A)$ 為 Y 的 subset, 我們當然可以考慮 $f^{-1}(f(A))$. 現假設 $a \in A$, 我們有 $f(a) \in f(A)$, 故依 inverse image 的定義得 $a \in f^{-1}(f(A))$, 得證 $A \subseteq f^{-1}(f(A))$. 反之, 若 $x \in f^{-1}(f(A))$, 表示 $f(x) \in f(A)$, 但這並不表

示 $x \in A$. 例如前面 $f:\{1,2\} \to \{0\}$ 定義為 $f(1)=f(2)=0$ 的例子. 若令 $A=\{1\}$, 我們有 $f(A)=\{0\}$, 但 $f^{-1}(f(A))=f^{-1}(\{0\})=\{1,2\} \neq A$. 由此例知 $f^{-1}(f(A))$ 有可能不包含於 A. 不過 $A \subseteq f^{-1}(f(A))$ 永遠是對的.

Question 5.5. 假設 $f:X \to Y$ 為 *function.* 試證明 $f^{-1}(f(X))=X$.

同樣的當 C 為 Y 的 subset 時, 既然 $f^{-1}(C)$ 為 X 的 subset, 我們當然可以考慮 $f(f^{-1}(C))$. 現假設 $y \in f(f^{-1}(C))$, 表示存在 $x \in f^{-1}(C)$ 使得 $y=f(x)$. 然而依 inverse image 的定義 $x \in f^{-1}(C)$ 表示 $f(x) \in C$, 故得 $y=f(x) \in C$. 得證 $f(f^{-1}(C)) \subseteq C$. 反之, 若 $y \in C$, 不見得會有 $y \in f(f^{-1}(C))$, 這是因為不一定存在 $x \in X$ 使得 $y=f(x)$. 例如考慮函數 $f:\{1,2\} \to \{3,4\}$ 定義為 $f(1)=f(2)=3$. 若令 $C=\{3,4\}$, 我們有 $f^{-1}(C)=\{1,2\}$, 但 $f(f^{-1}(C))=f(\{1,2\})=\{3\} \neq C$. 由此例知 C 有可能不包含於 $f(f^{-1}(C))$. 不過若 $y \in C$ 且存在 $x \in X$ 使得 $y=f(x)$, 則情況就不一樣了. 我們有下面的結果.

Proposition 5.2.7. 假設 $f:X \to Y$ 為 *function* 且 C 為 Y 的 *subset,* 則

$$f(f^{-1}(C))=C \cap f(X).$$

Proof. 前面已證得 $f(f^{-1}(C)) \subseteq C$, 又因 $f^{-1}(C) \subseteq X$, 故有 $f(f^{-1}(C)) \subseteq f(X)$, 因此得 $f(f^{-1}(C)) \subseteq C \cap f(X)$. 另一方面若 $y \in C \cap f(X)$, 表示 $y \in C$ 且存在 $x \in X$ 使得 $y=f(x)$. 因此知, 此 x 滿足 $f(x)=y \in C$, 亦即 $x \in f^{-1}(C)$. 所以 $y=f(x) \in f(f^{-1}(C))$, 得證 $C \cap f(X) \subseteq f(f^{-1}(C))$. 因此證明了 $f(f^{-1}(C))=C \cap f(X)$. $\square$

Proposition 5.2.7, 有許多應用. 例如給定函數 $f:X \to Y$ 以及 X 的 subset A. 我們有 $f(A)$ 為 Y 的 subset, 且 $f(A) \subseteq f(X)$. 故套用 Proposition 5.2.7 ($C=f(A)$ 的情況), 可得

$$f(f^{-1}(f(A)))=f(A) \cap f(X)=f(A).$$

Question 5.6. 假設 $f:X \to Y$ 為 *function* 且 C 為 Y 的 *subset.* 試利用 *Proposition 5.2.7, Proposition 5.2.6* 以及 *Question 5.5* 證明

$$f^{-1}(f(f^{-1}(C)))=f^{-1}(C).$$

5.3. Onto, One-to-One and Inverse

Onto 和 one-to-one 是函數中兩種特殊的性質. 有這兩種特殊性質的函數就會有所謂的反函數. 這些都是將來在進階數學課程中會遇到的性質. 我們將學習如何辨認 onto 及 one-to-one 的函數, 以及它們基本的性質.

所謂 onto (映成) 的函數, 簡單來說就是對應域裡每個元素, 都可由定義域裡的元素映射而得. 也就是說一個函數的 range (值域) 恰為 codomain (對應域) 就是 onto 的函數. 其正式定義如下:

Definition 5.3.1. 假設 $f:X \to Y$ 為 function. 若 $f(X)=Y$, 則我們稱 f 為 *onto.* 也就是說對任意 $y \in Y$ 皆存在 $x \in X$ 使得 $f(x)=y$. 有時也稱 onto 的函數為 *surjective function.*

用 inverse image 的觀點來看 $f:X\to Y$ 為 onto 也等同於對於任意 $y\in Y$, $f^{-1}(\{y\})\neq\emptyset$. 不過當要證明一個函數為 onto, 一般常用的方法還是如前一節找 image 的方法處理. 我們看以下的例子.

Example 5.3.2. (A) 在 Example 5.2.2 中我們考慮函數 $f:\mathbb{R}\setminus\{3\}\to\mathbb{R}$ 定義為 $f(x)=(x+1)/(x-3)$, $\forall x\in X$. 我們找出 f 的 range 為 $\mathbb{R}\setminus\{1\}$. 因此 f 不是 onto. 但若考慮 "新" 的函數 $g:\mathbb{R}\setminus\{3\}\to\mathbb{R}\setminus\{1\}$ 定義為 $g(x)=(x+1)/(x-3)$, $\forall x\in X$, 則 $g(x)$ 為 onto.

(B) 考慮函數 $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{N}\cup\{0\}$ 定義為

$$f(n)=\begin{cases}2n, & \text{if } n\geq 0;\\ -2n-1, & \text{if } n<0.\end{cases}$$

我們說明 f 為 onto. 首先由 f 的映射規則我們大致知道可以將 f 的對應域元素分成偶數與奇數. 現若 $k\in\mathbb{N}\cup\{0\}$ 為偶數, 表示 $k/2\in\mathbb{Z}$ 且 $k/2\geq 0$. 故此時取 $n=k/2$, 我們有 $f(n)=2n=k$. 而若 $k\in\mathbb{N}\cup\{0\}$ 為奇數, 表示 $k+1\in\mathbb{Z}$ 為偶數且 $k+1>0$. 此時取 $n=-(k+1)/2$, 我們有 $n\in\mathbb{Z}$ 且 $n<0$, 故依定義有 $f(n)=-2n-1=(-2(-(k+1)/2)-1=k$. 得證 f 為 onto.

當遇到抽象的函數 (即函數沒有具體的形式) 時, 有時用定義證明它是 onto 有點麻煩. 接下來我們介紹一個很好用來證明一個抽象函數為 onto 的方法.

Theorem 5.3.3. 假設 $f:X\to Y$ 為 *function*. 則 f 為 *onto* 若且唯若存在 $g:Y\to X$ 為 *function* 滿足 $f\circ g=\mathrm{id}_Y$.

Proof. ($\Rightarrow$) 當 $f:X\to Y$ 為 onto 時, 我們要利用 f 找到一個函數 $g:Y\to X$ 滿足 $f\circ g=\mathrm{id}_Y$. 這一個證明其實嚴格來說是要用 *Axiom of Choice* 來處理, 不過由於我們尚未介紹過它, 所以這裡的證明嚴格來說並不是很完善. 希望大家知道它的證明大致上的意思即可. 首先由 f 為 onto, 我們知道對任意 $y\in Y$, $f^{-1}(\{y\})\neq\emptyset$. 因此對於任意 $y\in Y$, 我們定義 $g(y)$ 為非空集合 $f^{-1}(\{y\})$ 中的某一個特定元素. 由此我們定義了一個從 Y 到 X 的函數 g. 依此定義我們有 $f\circ g:Y\to Y$ 且對於任意 $y\in Y$, 若 $g(y)=x$, 則因 $x\in f^{-1}(\{y\})$, 知 $f(x)=y$. 也就是說 $f\circ g(y)=f(g(y))=f(x)=y$. 得證 $f\circ g=\mathrm{id}_Y$.

($\Leftarrow$) 現假設 $g:Y\to X$ 為 function 且滿足 $f\circ g=\mathrm{id}_Y$, 我們要證明 $f:X\to Y$ 為 onto, 也就是說對任意 $y\in Y$, 要找到 $x\in X$ 使得 $y=f(x)$. 然而因 $y\in Y$, 我們有 $g(y)\in X$. 因此若考慮 $x=g(y)\in X$, 則 $f(x)=f(g(y))=f\circ g(y)=\mathrm{id}_Y(y)=y$. 得證確實存在 $x\in X$ 使得 $y=f(x)$, 故知 $f:X\to Y$ 為 onto. $\square$

Example 5.3.4. 考慮 $X=\{1,2,3\}$, $Y=\{a,b\}$ 以及 $f:X\to Y$, 定義為 $f(1)=f(2)=a$, $f(3)=b$. 依此定義 $f:X\to Y$ 為 onto. 我們要找到 $g:Y\to X$ 使得 $f\circ g=\mathrm{id}_Y$. 由於要定義從 Y 到 X 的函數, 所以每個 Y 中的元素都要定義其如何映射. 現由於 $f^{-1}(\{a\})=\{1,2\}$, 我們任取 $f^{-1}(\{a\})$ 中的一個元素, 比方說取 2, 因此定義 $g(a)=2$. 又由於 $f^{-1}(\{b\})=\{3\}$ 僅有一個元素, 所以我們定義 $g(b)=3$. 依此定義我們有 $g:Y\to X$ 為一個 function 且滿足 $f\circ g(a)=f(g(a))=f(2)=a$ 以及 $f\circ g(b)=f(g(b))=f(3)=b$. 故得 $f\circ g=\mathrm{id}_Y$.

Theorem 5.3.3 可以幫我們不必用 onto 的定義處理有關 onto 的證明. 例如我們有以下的性質.

Proposition 5.3.5. 若 $f_1 : X \to Y$, $f_2 : Y \to Z$ 皆為 *onto function,* 則 $f_2 \circ f_1 : X \to Z$ 亦為 *onto.*

Proof. (方法一) 我們可以用 onto 的定義處理, 對於任意 $z \in Z$, 要找到 $x \in X$ 使得 $f_2 \circ f_1(x) = z$. 然而 $f_2 : Y \to Z$ 為 onto, 故對此 $z \in Z$, 存在 $y \in Y$ 使得 $f_2(y) = z$. 又因 $f_1 : X \to Y$ 為 onto, 所以對此 $y \in Y$, 存在 $x \in X$ 使得 $f_1(x) = y$. 現利用此 x, 我們有 $f_2 \circ f_1(x) = f_2(f_1(x)) = f_2(y) = z$. 因此得證 $f_2 \circ f_1 : X \to Z$ 為 onto.

(方法二) 利用 Theorem 5.3.3, 要證明 $f_2 \circ f_1 : X \to Z$ 為 onto, 我們僅要找到 $g : Z \to X$ 使得 $(f_2 \circ f_1) \circ g = \mathrm{id}_Z$ 即可. 然而已知 $f_1 : X \to Y$, $f_2 : Y \to Z$ 皆為 onto, 故由 Theorem 5.3.3 知存在 $g_1 : Y \to X$, $g_2 : Z \to Y$ 滿足 $f_1 \circ g_1 = \mathrm{id}_Y$ 以及 $f_2 \circ g_2 = \mathrm{id}_Z$. 現令 $g = g_1 \circ g_2 : Z \to X$, 我們有 $(f_2 \circ f_1) \circ g = (f_2 \circ f_1) \circ (g_1 \circ g_2)$. 利用合成函數的結合律 (Proposition 5.1.6) 以及 Lemma 5.1.5, 我們有 $(f_2 \circ f_1) \circ (g_1 \circ g_2) = f_2 \circ (f_1 \circ g_1) \circ g_2 = f_2 \circ (\mathrm{id}_Y \circ g_2) = f_2 \circ g_2 = \mathrm{id}_Z$. 得證 $(f_2 \circ f_1) \circ g = \mathrm{id}_Z$. $\square$

要注意 Proposition 5.3.5 的反向不一定成立, 也就是說 $f_2 \circ f_1$ 為 onto 並不表示 f_1, f_2 皆為 onto. 例如在 Example 5.3.4 中 $g : \{a,b\} \to \{1,2,3\}$ 定義為 $g(a) = 2, g(b) = 3$, 不是 onto. 但 $f \circ g = \mathrm{id}_{\{a,b\}}$ 為 onto. 不過我們有以下之結果.

Corollary 5.3.6. 若 $f_1 : X \to Y$, $f_2 : Y \to Z$ 皆為 *function* 且 $f_2 \circ f_1 : X \to Z$ 為 *onto,* 則 f_2 為 *onto.*

Proof. 由 $f_2 \circ f_1 : X \to Z$ 為 onto, 利用 Theorem 5.3.3 知存在 $g : Z \to X$ 滿足 $(f_2 \circ f_1) \circ g = \mathrm{id}_Z$. 因此利用合成函數結合律得 $f_2 \circ (f_1 \circ g) = \mathrm{id}_Z$. 現令 $g_2 = f_1 \circ g$, 我們有 $g_2 : Z \to Y$ 且滿足 $f_2 \circ g_2 = f_2 \circ (f_1 \circ g) = \mathrm{id}_Z$. 所以再次利用 Theorem 5.3.3 得證 $f_2 : Y \to Z$ 為 onto. $\square$

Question 5.7. 試利用 *onto* 的定義證明 *Corollary 5.3.6.*

要注意 Corollary 5.3.6 的反向也不一定成立, 也就是說單僅假設 f_2 為 onto 並不能保證 $f_2 \circ f_1$ 為 onto.

Question 5.8. 考慮 $X = \{a,b\}$, $Y = \{1,2,3\}$, 試找到例子 $f_1 : X \to Y$, $f_2 : Y \to X$ 為 *functions* 其中 f_2 為 *onto,* 但是 $f_2 \circ f_1$ 不是 *onto.*