Chapter 2

Methods of Proof

學會了簡單的邏輯後, 接下來便是學習如何證明. 在本章中我們將介紹一些證明的方法. 這裡我們只談有關證明的一些基本原則, 而不談證明的技巧, 所以給的例子將會挑選淺顯易懂的證明.

2.1. IF-Then 的證明

在數學中最常看到的就是這種 $P \Rightarrow Q$ 的 statement. 要證明這種 statement, 我們大致上有 **direct method**, **contrapositive method** 和 **contradiction method** 三種方法.

2.1.1. Direct Method. 所謂 direct method 指的就是直接證明, 也就是直接利用 P 成立的假設得到 Q 成立. (再次強調, 我們不必管 P 不成立時, Q 會如何). 當我們要證明 $P \Rightarrow Q$ 時, 若覺得 P 的條件已經足夠, 便可以考慮使用直接證明. 例如以下的例子.

Example 2.1.1. 令 p,a,b 為整數. 證明 if $p \mid a$ and $p \mid b$, then $p \mid a+b$.

Proof. 由假設 $p \mid a, p \mid b$, 知存在整數 m,n 使得 $a = pm, b = pn$. 故得

$$a+b = pm+pn = p(m+n).$$

因 $m+n$ 為整數, 得證 $p \mid a+b$. □

有時用直接證明的方法並不能一次到位, 需要借助其他的結果幫忙才能完成. 也就是說或許我們不能直接證出 $P \Rightarrow Q$, 但若證得 $P \Rightarrow R$ 又證得 $R \Rightarrow Q$, 此時便證得 $P \Rightarrow Q$ 了. 這是因為若證得 $P \Rightarrow R$, 表示 P 對的話 R 一定對, 再由 $R \Rightarrow Q$ 知 R 對的話 Q 一定對, 故連結而知 P 對則 Q 一定對, 得證 $P \Rightarrow Q$. 例如以下的例子.

Example 2.1.2. 設 a 為正實數且 $a \neq 1$. 證明若 x,y 為實數滿足 $a^x = a^y$, 則 $x = y$.

Proof. 對於任何實數 y, 我們知 $a^y \neq 0$, 故由 $a^x = a^y$, 等號兩邊除以 a^y 得 $a^{x-y} = 1$. 又對任意實數 z, 若 $a^z = 1$, 則 $z = 0$, 故得證 $x-y = 0$, 即 $x = y$. □

這個證明的例子中, 我們其實是先證得 $(a^x = a^y) \Rightarrow (a^{x-y} = 1)$, 再由 $(a^{x-y} = 1) \Rightarrow (x = y)$ 得證 $(a^x = a^y) \Rightarrow (x = y)$. 其中我們用了一個大家都知道的事實, 即當 a 為正實數且 $a \neq 1$, 若 $a^z = 1$, 則 $z = 0$. 這個事實若用 direct method 並不好證明, 等一下我們會利用 contradiction method 來證明.

有時在 direct method 中我們可以分成好幾種情況, 看看哪些情況符合 P 的條件, 然後證得 Q. 這樣的證明方法有時稱為 *proof in cases*. 例如以下的例子.

Example 2.1.3. 假設 x 為實數. 證明 if $x^2 - 3x + 2 < 0$, then $1 < x < 2$.

Proof. 由 $x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2) < 0$, 我們知可分成 2 種情況, 即

(1) $(x-1) < 0$ and $(x-2) > 0$;

(2) $(x-1) > 0$ and $(x-2) < 0$.

(1) 的情況表示 $x < 1$ 且 $x > 2$. 由於沒有實數 x 會同時滿足 $x < 1$ 以及 $x > 2$, 我們知 (1) 不可能成立, 故推得 (2), 即 $x > 1$ 且 $x < 2$. 證得 $1 < x < 2$. □

注意, 在這個證明中, 有些同學或許會疑惑為什麼是排除 (1), 而不直接驗證 (2) 可得 $x^2 - 3x + 2 < 0$ 呢? 這是錯誤的. 在我們的證明中明明白白表示: 若 x 滿足 $x^2 - 3x + 2 < 0$, 那麼 x 一定會滿足 (1) 或是 (2). 排除 (1) 表示只有 (2) 會對, 所以確定若 x 滿足 $x^2 - 3x + 2 < 0$, 那麼 x 一定滿足 (2). 若僅說 x 滿足 (2) 可得 $x^2 - 3x + 2 < 0$, 而沒有排除 (1), 那麼這是證明 if $1 < x < 2$, then $x^2 - 3x + 2 < 0$, 而不是證 if $x^2 - 3x + 2 < 0$, then $1 < x < 2$. 千萬別搞錯.

Question 2.1. 假設 x 為實數.

(1) *"If $x^2 - 3x + 2 < 0$, then $0 < x < 3$."* 和 *"If $x^2 - 3x + 2 < 0$, then $1.3 < x < 1.7$."* 這兩個 *statements* 哪一個是對的?

(2) *"If $0 < x < 3$, then $x^2 - 3x + 2 < 0$."* 和 *"If $1.3 < x < 1.7$, then $x^2 - 3x + 2 < 0$."* 這兩個 *statements* 哪一個是對的?

2.1.2. Contrapositive Method. 我們稱 $(\neg Q) \Rightarrow (\neg P)$ 為 $P \Rightarrow Q$ 這個 statement 的 *contrapositive statement.* 回顧一下, 我們知道 $P \Rightarrow Q$ 和 $(\neg Q) \Rightarrow (\neg P)$ 是 logically equivalent (參見式子 (1.11)). 也就是說 $P \Rightarrow Q$ 和 $(\neg Q) \Rightarrow (\neg P)$ 的對錯是一致的. 因此, 若我們能證明 $(\neg Q) \Rightarrow (\neg P)$ 便證得 $P \Rightarrow Q$ 了.

當要證明 $P \Rightarrow Q$ 時, 若發現 P 的條件似乎不容易幫助我們證明, 而 $\neg Q$ 較容易處理時便可以考慮使用 contrapositive method. 也就是說證明 $(\neg Q) \Rightarrow (\neg P)$. 最常發生的情況就是有不等式的情形. 因為不等式不如等式使用方便, 很多不等式的使用規則其實都是用等式推導的, 所以如果一個 statement 牽涉到不等式, 而它的 contrapositive statement 是等式. 那麼自然用 contrapositive method 會比較容易證明. 我們有以下的例子.

Example 2.1.4. 設 x, y 為實數. 證明 if $x \neq y$, then $x^3 \neq y^3$.

當然了, 若你了解 $f(x)=x^3$ 的圖形或利用微積分, 可以知道這一定對的. 不過我們想要用比較基礎的方法處理. 若用 contrapositive method 來證明, 就是先假設 $\neg(x^3\neq y^3)$ (即 $x^3=y^3$), 要證得 $\neg(x\neq y)$ (即 $x=y$).

Proof. 利用 contrapositive method, 首先假設 $x^3=y^3$, 即 $0=x^3-y^3=(x-y)(x^2+xy+y^2)$. 又

$$x^2+xy+y^2=(x+\frac{1}{2}y)^2+\frac{3}{4}y^2.$$

故得 $x^2+xy+y^2>0$, 除非 $x=0$ and $y=0$ (此時 $x=y$). 因此由 $(x-y)(x^2+xy+y^2)=0$ 可得 $x-y=0$, 即 $x=y$. 得證 if $x\neq y$, then $x^3\neq y^3$. □

若一個 statement 是由 x 所符合的較複雜的性質, 來推得 x 本身較簡單的性質, 此時也是用 contrapositive method 的好時機. 例如以下的簡單例子.

Example 2.1.5. 設 x 為整數. 證明 if x^2 is even (偶數), then x is even.

Proof. 用 contrapositive method, 即證明若 x 為奇數, 則 x^2 為奇數. 然而 x 為奇數, 表示 x 可以寫成 $x=2n+1$, 其中 n 為整數. 故得證 $x^2=(2n+1)^2=4n^2+4n+1=2(2n^2+2n)+1$ 為奇數. □

Question 2.2. 假設 x,y 為整數. 試用 *contrapositive method* 證明 *if* $x+y$ *is even, then* x *and* y *are both even or odd (*奇數*).*

有時用 proof in cases 處理的情況, 也可用 contrapositive method 來證明. 例如 Example 2.1.3 就可以用 contrapositive method 證明. 也就是說, 先假設 $\neg(1<x<2)$ (即 $x\geq 2$ or $x\leq 1$) 求得 $\neg(x^2-3x+2<0)$ (即 $x^2-3x+2\geq 0$). 我們看另外的例子.

Example 2.1.6. 設 x,y,a 為正實數. 證明 if $xy=a$, then $x\leq\sqrt{a}$ or $y\leq\sqrt{a}$.

Proof. 用 contrapositive method, 先假設 $\neg((x\leq\sqrt{a})\vee(y\leq\sqrt{a}))$ (即 $x>\sqrt{a}$ and $y>\sqrt{a}$) 要證得 $\neg(xy=a)$ (即 $xy\neq a$). 然而 x,y,a 為正, 故由 $x>\sqrt{a}$ and $y>\sqrt{a}$ 可得 $xy>(\sqrt{a})^2=a$, 得證 $xy\neq a$. □

Question 2.3. 設 x,y,a 為正實數. 請問 *if* $xy=a$*, then* $x\geq\sqrt{a}$ *or* $y\geq\sqrt{a}$ 是否為對? 若為對, 此和 *Example 2.1.6,* 是否有矛盾?

2.1.3. Contradiction Method. 回顧式子 (1.10) 告訴我們 $P\Rightarrow Q$ 和 $Q\vee\neg P$ 是 logically equivalent. 也就是說, 若我們能證明 $Q\vee\neg P$ 就等同證明了 $P\Rightarrow Q$. 然而 $Q\vee\neg P$ 是 "或" 的情況, 處理起來有點像前面提過的 proof in cases, 沒有太多的優勢. 不過若考慮 $\neg(P\Rightarrow Q)$, 此時和 $(\neg Q)\wedge P$ 為 logically equivalent (參見式子 (1.12)). 因此若能證明 $(\neg Q)\wedge P$ 一定是錯的, 便證得 $P\Rightarrow Q$ 為對. 這就是所謂的 contradiction method (反證法).

Contradiction method 的處理方法就是, 先假設 $(\neg Q)$ 和 P 皆為對, 再從中推導出與我們知道一定對的 statement 相矛盾. 如此一來便表示 $(\neg Q)$ 和 P 是錯的, 而得證 $P\Rightarrow Q$. 這個方法的最大優點就是它一次便同時假設 P 和 $\neg Q$ 為對, 給我們較多的資訊去推導, 而不像

direct method 僅假設 P 為對, 或 contrapositive method 僅假設 $\neg Q$ 為對. 它的缺點就是, 不像 direct method 或 contrapositive method 明確地知道要推導甚麼 (即由 P 推導出 Q 或由 $\neg Q$ 推導出 $\neg P$), 而是要推導出一個“未知”的矛盾.

當要證明 $P \Rightarrow Q$ 時, 若發現單獨 P 的條件或是單獨 $\neg Q$ 的條件似乎不容易幫助我們證明, 這時便可以考慮 P 和 $\neg Q$ 的條件可同時使用的 contradiction method. 我們看以下的例子.

Example 2.1.7. 設 r 為實數, 證明 if $r^2 = 2$, then r is irrational (無理數).

我們幾乎沒有直接的方法證明一個數是無理數, 所以不可能用 direct method. 而若用 contrapositive method 雖可先假設 r 為有理數, 但要推得 $r^2 \neq 2$ 這個不等式. 前面已提過不等式的推導並不容易, 所以我們用 contradiction method 來證明.

Proof. 用反證法, 即假設 r 為有理數且滿足 $r^2 = r$, 希望能得到矛盾. 依假設 r 為有理數, 表示 r 可以寫成 $r = (m/n)$, 其中 m,n 為整數. 現若 m,n 皆為偶數, 我們可以約掉 2, 如此一直下去, 我們可假設 m,n 為一奇一偶或皆為奇數. 然而 $r^2 = 2$, 即 $m^2 = 2n^2$, 由 Example 2.1.5 知 m 必為偶數. 也就是說 m 可寫成 $m = 2m'$, 其中 m' 為整數. 此時得 $4m'^2 = 2n^2$, 即 $n^2 = 2m'^2$. 故再由 Example 2.1.5 知 n 亦為偶數. 此與當初假設 m,n 為一奇一偶或皆為奇數相矛盾. 故得證 if $r^2 = 2$, then r is irrational. □

從 Example 2.1.7 中我們應可體會, 當初若沒有將 $r = (m/n)$ 中分子分母的 2 約乾淨, 就無法推出矛盾了. 所以用 contradiction method 證明的困難處就是要“製造矛盾”.

回顧在 Example 2.1.2 的證明中, 我們用了一個事實, 即當 $a \neq 1$ 且為正實數時, 若 z 為實數 $a^z = 1$, 則 $z = 0$. 我們可以用 contradiction method 來證明這個 statement.

Example 2.1.8. 設 $a \neq 1$ 且為正實數. 證明若 z 為實數滿足 $a^z = 1$, 則 $z = 0$.

若要用反證法, 我們必須假設 $z \neq 0$ 且 $a^z = 1$ 而得到矛盾. 要如何製造矛盾呢? 我們知道這個 statement $a = 1$ 是重要的前提 (否則它會錯), 所以矛盾的關鍵是 $a \neq 1$.

Proof. 我們利用 contradiction method, 先假設 $z \neq 0$ 且 $a^z = 1$. 此時由於 $z \neq 0$, 我們知 $1/z$ 是存在的, 故利用 $(a^z)^{1/z} = a$ 以及 $a^z = 1$, 得

$$a = (a^z)^{1/z} = 1^{1/z} = 1.$$

此與已知 $a \neq 1$ 相矛盾, 得證若 $a^z = 1$, 則 $z = 0$. □

2.1.4. If and Only If 的證明. $P \Leftrightarrow Q$ 的證明基本上就是要證明 $P \Rightarrow Q$ 和 $Q \Rightarrow P$. 大家或許看過有些證明由於每一個步驟逆推回去也是對的, 所以在推導完 $P \Rightarrow Q$ 後便說反向亦然, 而得證 $P \Leftrightarrow Q$. 在這裡特別提醒大家, 除非你確認每一個步驟逆推回去也是對的, 千萬不要隨便認定反向亦然, 就說得證 $P \Leftrightarrow Q$. 尤其在以後許多進階一點的定理, 很可能兩邊的推導方式是用到完全不同的概念或原理. 所以證明 $P \Leftrightarrow Q$ 還是要分別證明 $P \Rightarrow Q$ 和 $Q \Rightarrow P$ 為宜.

例如設 a 為整數要證明 "a^2 為偶數 $\Leftrightarrow$ a 為偶數", 大家可能會先證 $\Leftarrow$ 這個方向. 此時可令 $a = 2n$, 其中 n 為整數, 便得 $a^2 = (2n)^2 = 4n^2$ 為偶數. 但這個推導方式, 逆推就有問題了. 因為知道 a^2 為偶數, 為何 a^2 一定可以寫成 $4n^2$ 這個樣子呢? 所以 $\Rightarrow$ 這個方向還是要推導的 (我們在 Example 2.1.5 已證明過了).

由於 $(P \Rightarrow Q) \sim ((\neg Q) \Rightarrow (\neg P))$ 且 $(Q \Rightarrow P) \sim ((\neg P) \Rightarrow (\neg Q))$ 我們知 $P \Leftrightarrow Q$ 和 $(\neg P) \Leftrightarrow (\neg Q)$ 為 logically equivalent. 有的同學會覺得若證明 $P \Leftrightarrow Q$ 較麻煩, 可考慮證明 $(\neg P) \Leftrightarrow (\neg Q)$. 其實這是沒必要的, 不管證明哪一個都需要經過一樣的過程. 例如假設 a, b 為整數, 證明 "ab is even $\Leftrightarrow$ a is even or b is even" 和證明 "ab is odd $\Leftrightarrow$ a and b are odd" 其實是一樣的. 即使後面那一個看起來比較簡潔, 但是不管證明哪一個, 證明的過程都是一樣的. 反倒是有的同學可能會證明了 $(\neg Q) \Rightarrow (\neg P)$ 後又去證 $P \Rightarrow Q$. 重複證明了同一件事而不自知, 誤以為證得了兩個方向, 千萬要注意. 所以基本上在證明若且唯若的 statement 時, 最好表明目前在證明哪一個方向. 這樣自己較不會弄錯, 看證明的人也較清楚整個證明過程. 兩全其美, 何樂而不為呢?

數學上也經常會有類似這樣的 statement:

$$\text{The following are equivalent.} \quad (1)\,P; \quad (2)\,Q; \quad (3)\,R.$$

(有時不只會有 P, Q, R 三項, 可能會有更多項). 這個意思就是說

$$P \Leftrightarrow Q, \quad Q \Leftrightarrow R \quad \text{and} \quad R \Leftrightarrow P.$$

雖是如此, 我們不必 "六" 個 $\Rightarrow$ 都證. 事實上僅要證明

$$P \Rightarrow Q, \quad Q \Rightarrow R \quad \text{and} \quad R \Rightarrow P$$

即可. 這是因為 $Q \Rightarrow P$ 的部分, 可由 $Q \Rightarrow R$ 以及 $R \Rightarrow P$ 得到, 而 $R \Rightarrow Q$ 的部分, 可由 $R \Rightarrow P$ 以及 $P \Rightarrow Q$ 得到. 最後 $P \Rightarrow R$ 的部分, 可由 $P \Rightarrow Q$ 以及 $Q \Rightarrow R$ 得到. 當然了, 有時不一定這個順序好證, 也可考慮倒過來證明

$$R \Rightarrow Q, \quad Q \Rightarrow P \quad \text{and} \quad P \Rightarrow R.$$

甚至有時候會發生不管哪一邊都不好證, 例如 $P \Leftrightarrow R$ 兩邊都不好證, 這時證明

$$P \Leftrightarrow Q \quad \text{and} \quad Q \Leftrightarrow R$$

也可. 因為 $P \Rightarrow R$ 的部分, 可由 $P \Rightarrow Q$ 以及 $Q \Rightarrow R$ 得到, 而 $R \Rightarrow P$ 的部分, 可由 $R \Rightarrow Q$ 以及 $Q \Rightarrow P$ 得到. 總之, 在證明這一類的問題, 要注意推導的方向, 確保任兩個 statement 都可通行無阻. 時時標明目前是從哪一個 statement 推導到哪一個 statement, 是必要的.

2.2. Existence and Uniqueness 的證明

Existence 指的是存在性, 而 uniqueness 指的是唯一性. 這兩個性質的探討也經常在數學定理中出現. 要注意, existence 和 uniqueness 是兩個互相獨立的性質. 也就是說存在未必會唯一. 而這裡的唯一指的是若存在則會唯一, 所以證得唯一也未必會存在. 所以這裡, 我們分開討論 existence 和 uniqueness 的證明.

2.2.1. Existence. 有關 existence 的證明方法大致上有兩類. 一類是所謂的 *constructive method* 指的是確實告知存在的是什麼. 另一類是 *nonconstructive method* 指的是利用已知的理論或邏輯的推導得知一定存在, 但未必知道有哪些.

例如證明存在實數 x 滿足 $6x^2-x-1=0$. 我們可以將 $6x^2-x-1$ 分解得 $(2x-1)(3x+1)$ 故明確找出 $x=1/2$ (或 $x=-1/3$) 這個實數會滿足 $6x^2-x-1=0$. 這就是一個 construct method. 我們也可考慮多項式函數 $f(x)=6x^2-x-1$, 發現 $f(0)=-1<0$ 且 $f(1)=4>0$. 故由多項式函數為連續函數以及連續函數的中間值定理, 證得 $f(x)=0$ 在 $0<x<1$ 之間必有一根, 而證得了存在性. 這個方法雖證出存在性, 但因無法明確指出哪一個 x 會滿足 $6x^2-x-1=0$, 所以是 nonconstructive method. 我們再看以下的例子.

Example 2.2.1. 證明 there exists irrational numbers a,b such that a^b is rational.

Proof. Constructive Method: 考慮 $a=\sqrt{2}$ 且 $b=\log_2 9$. 我們已知 a 為無理數. 同樣的利用反證法可證明 b 亦為無理數. 事實上若存在 m,n 為整數滿足 $\log_2 3=n/m$. 表示 $2^n=3^m$, 我們知道 3 的任何整數次方都不會是偶數, 得到矛盾. 故知 $b=\log_2 9$ 為無理數. 此時

$$a^b=2^{\frac{1}{2}\log_2 9}=2^{\log_2 3}=3,$$

得證存在無理數 a,b 使得 a^b 為有理數.

Nonconstructive Method: 考慮 $a'=\sqrt{2}$ 且 $b'=\sqrt{2}$. 我們知道 a',b' 為無理數. 令 $c=(a')^{b'}$. 若 c 為有理數, 則 $a=\sqrt{2},b=\sqrt{2}$ 為所求. 而若 c 為無理數, 此時令 $a=c,b=\sqrt{2}$, 則

$$a^b=(\sqrt{2}^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}}=\sqrt{2}^2=2.$$

得證存在無理數 a,b 使得 a^b 為有理數. □

這裡這個 nonconstructive method 由於沒有證明 $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ 是否為有理數. 因此無法確定 $a=b=\sqrt{2}$ 和 $a=\sqrt{2}^{\sqrt{2}},b=\sqrt{2}$ 中哪一個會是符合存在性的要求, 但確定它們兩個其中有一個會符合, 所以是 nonconstructive method. 事實上只要知道 $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ 是無理數, 令 $a=\sqrt{2}^{\sqrt{2}},b=\sqrt{2}$ 這便是 constructive method. 不過 $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ 是無理數的證明非常困難 (遠遠超過本講義的範圍). 所以我們避開它的證明, 而仍能證明存在性, 這就是 nonconstructive method 的精神.

Question 2.4. 試找到其他的例子或更一般的方法, 利用 *construct method* 證明 *there exists irrational numbers a,b such that a^b is rational.*

大家可以發現利用 constructive method 得到存在性, 證明的重點並不是在於如何找到這些存在的東西, 而是要確實驗證並說明為何它們符合存在的條件. 例如在證明一個方程式的解存在時, 同學們常常利用等式推導出解的可能值, 而沒有代回驗證是否為解就誤以為證得存在性. 這是同學們常弄錯的, 所以我門特別說明一下. 在求解的推導過程, 往往是假設解存在, 再利用一些等式推導出解的“可能值”. 也就是說, 除非你的推導過程是“雙向”皆成立的, 否則你推出的結果是,「若解存在的話, 則它們可能的值」, 未必這些真的是解 (這再

次說明若 P 則 Q 方向性的重要). 這些推出的值只是讓我們縮小要驗證的範圍而已, 此時唯有將這些值代回驗證, 才能確保解的存在. 我們看下面的例子.

Example 2.2.2. 是否存在實數 x 滿足 $\sqrt{3-2x}=x-2$?

若直接假設有解, 則兩邊平方得 $3-2x=x^2-4x+4$, 即 $x^2-2x+1=0$. 得 $x=1$. 這表示若有解, 其解必為 $x=1$. 也就是除了 $x=1$ 可能會是此方程式之解外, 其他實數都不可能是解. 但將 $x=1$ 代回原式, 得 $1=-1$ 不合. 故知不存在實數 x 滿足 $\sqrt{3-2x}=x-2$.

其實使用 nonconstructive method 證明存在性, 一般或多或少會用到反證法. 例如前面提過利用連續函數的中間值定理證明存在實數 x 滿足 $6x^2-x-1=0$. 雖然看似沒用到反證法, 不過中間值定理本身的證明一般來說都會用到反證法. 還有一個常用來證明存在性的方法, 就是 *pigeonhole principle* (鴿籠原理). 它原本是 “Dirichlet’s drawer principle”, 不過現在許多人習慣用 pigeonhole principle 稱之.

Theorem 2.2.3 (Pigeonhole Principle)**.** 令 n 為正整數. 假設有 n 個鴿籠以及多於 n 隻的鴿子. 若要所有的鴿子住進鴿籠裡, 則一定會有一個鴿籠會有兩隻以上的鴿子.

Proof. 很明顯的, 這個存在性無法用 constructive method. 利用反證法, 原本 statement 是說「存在一個鴿籠會有兩隻以上的鴿子」, 它的否定便是「所有的鴿籠都只有一隻或沒有鴿子」但如此一來表示所有 n 個鴿籠裡的鴿子最多只有 n 隻, 與原本假設有多於 n 隻的鴿子矛盾. 得證必有一個鴿籠會有兩隻以上的鴿子. □

將來我們會碰到利用 pigeonhole principle 證明存在性的問題. 大致上, 只要弄清楚甚麼拿來當鴿子, 甚麼拿來當鴿籠就好. 例如證明任取 6 個整數, 其中一定有兩個整數其除以 5 的餘數相同. 這裡我們可以將 6 個整數當成 6 隻鴿子, 將鴿籠從 0 到 4 編號. 若除以 5 的餘數為 0 就放到 0 號鴿籠, 餘數為 1 就放 1 號鴿籠, 依此類推. 因鴿子個數 6 多於鴿籠的個數 5, 利用鴿籠原理, 我們知必有一個鴿籠裡有兩隻以上的鴿子. 也就是說會有兩個整數除以 5 的餘數相同.

我們可以將這個結果稍微推廣一下. 例如任取 16 個整數, 可以證明其中可找到 4 個整數除以 5 有同樣餘數. 這是因為若這些整數除以 5 餘數為 $0,1,2,3,4$ 的都不超過 3 個, 那麼這些整數總共最多不會超過 15 個, 就和原本假設有 16 個整數相矛盾了. 我們有以下 Theorem 2.2.3 的推廣, 證明就不再贅述了.

Theorem 2.2.4. 令 k,n 為正整數. 假設有 n 個鴿籠以及多於 kn 隻的鴿子. 若要所有的鴿子住進鴿籠裡, 則一定會有一個鴿籠會有 k 隻以上的鴿子.

Question 2.5. 試證明 *Theorem 2.2.4*

最後提醒一下, 鴿籠原理不能處理鴿子數少於或等於鴿籠數的情況 (除非另有特殊條件). 它並沒有說在鴿子數少於或等於鴿籠數的情況下不會有鴿籠有兩隻以上的鴿子. 另外它也沒有說在鴿子數多於鴿籠數的情況之下不會有空籠子. 這些都很容易找到反例, 請不要自己過度解讀這個原理.