2.2.2. Uniqueness. 基本上唯一性的證明是在假設存在的前提之下去證明唯一. 所以唯一性的證明一般和存在性的證明是無關的. 當然了, 如果已知不存在了, 就不必去證明唯一性了. 例如在 Example 2.2.2 中當我們假設 x 為解而推得 $x=1$ 時, 便證明了此方程式若有解則解唯一. 不過後來知道方程式無解, 所以這唯一性就不重要了.

大致上唯一性的證明也分成直接證明與反證法兩種. 直接證明就如前述, 直接說明若東西存在應該是什麼. 而反證法一般用的方法是假設有兩個不同的東西滿足條件, 進而推得矛盾. 我們簡單的用 $\mathbb{R}^2$ 上向量的性質來說明.

Example 2.2.5. 證明 $\mathbb{R}^2$ 中若存在一個向量 $\overrightarrow{O}$ 滿足對任意 $\mathbb{R}^2$ 上的向量 $\overrightarrow{V}$ 皆符合 $\overrightarrow{V}+\overrightarrow{O}=\overrightarrow{V}$, 則 $\overrightarrow{O}$ 是唯一的.

(1) 直接證明: 假設 $\overrightarrow{O}=(x,y)$, 對任意 $\overrightarrow{V}=(a,b)\in\mathbb{R}^2$. 由於 $\overrightarrow{O}$ 須符合 $\overrightarrow{V}+\overrightarrow{O}=\overrightarrow{V}$, 得 $(a,b)+(x,y)=(a+x,b+y)=(a,b)$. 利用向量相等的定義得 $a+x=a, b+y=b$, 即 $x=0, y=0$. 得證 $\overrightarrow{O}$ 若存在, 則必須等於 $(0,0)$.

(2) 反證法: 假設 $\overrightarrow{O},\overrightarrow{Q}\in\mathbb{R}^2$ 且 $\overrightarrow{O}\neq\overrightarrow{Q}$ 皆滿足對任意 $\overrightarrow{V}\in\mathbb{R}^2$,

$$\overrightarrow{V}+\overrightarrow{O}=\overrightarrow{V} \tag{2.1}$$

以及

$$\overrightarrow{V}+\overrightarrow{Q}=\overrightarrow{V} \tag{2.2}$$

考慮 $\overrightarrow{Q}=\overrightarrow{V}$ 的情形代入式子 (2.1) 得 $\overrightarrow{Q}+\overrightarrow{O}=\overrightarrow{Q}$. 同理將 $\overrightarrow{O}=\overrightarrow{V}$ 代入式子 (2.2) 得 $\overrightarrow{O}+\overrightarrow{Q}=\overrightarrow{O}$. 由於 $\overrightarrow{Q}+\overrightarrow{O}=\overrightarrow{O}+\overrightarrow{Q}$, 得 $\overrightarrow{Q}=\overrightarrow{O}$. 此與當初假設 $\overrightarrow{O}\neq\overrightarrow{Q}$ 相矛盾, 得證唯一性.

Question 2.6. 給定 $\overrightarrow{V}\in\mathbb{R}^2$ 試利用直接證法以及反證法證明: $\mathbb{R}^2$ 中若存在一個向量 $\overrightarrow{W}$ 滿足 $\overrightarrow{V}+\overrightarrow{W}=\overrightarrow{O}$, 則 $\overrightarrow{W}$ 是唯一的.

注意在 Example 2.2.5 中的直接證法中, 我們求出 $\overrightarrow{O}$ 若存在, 則 $\overrightarrow{O}=(0,0)$. 如再帶回驗證, 確認 $\overrightarrow{O}=(0,0)$ 確實符合, 我們便也證得存在性了. 這是直接證法的好處. 而反證法就沒辦法推得存在性了. 所以一般不是用直接證明時, 存在性及唯一性的證明是要分開來處理的. 然而將來我們會碰到較抽象的數學問題時, 大多直接證明是行不通的. 此時只好仰賴反證法了.

Example 2.2.6. 證明若存在一個實數 r 滿足, $r^3=3$, 則此實數 r 是唯一的.

Proof. 回顧一下在 Example 2.1.4 中我們證明了, 若 x,y 為實數且 $x\neq y$, 則 $x^3\neq y^3$. 假設 $r\in\mathbb{R}$ 滿足, $r^3=3$ 且 $s\neq r$ 是另一個實數滿足 $s^3=3$, 則利用 Example 2.1.4 的結果得 $3=s^3\neq r^3=3$. 由此矛盾知不可能有另一個實數 s 會滿足 $s^3=3$. □

在 Example 2.2.6 中我們是先證明 $x\neq y$ 時, x,y 不可能都符合某性質, 再利用反證法推得唯一性. 這是我們一般證明唯一性常用的方法. 再強調一次, Example 2.2.6 的證明中我們無法得知是否存在實數 r 滿足 $r^3=3$, 我們只知道若存在的話必唯一. 至於此存在性的證明, 是需要另外利用實數的完備性 (或利用多項式函數 $f(x)=x^3$ 的連續性) 來證明的. 這樣有了存在性和唯一性我們才進一步用符號 $3^{1/3}$ 來表示這個唯一滿足 $r^3=3$ 的實數 r.

2.3. Mathematical Induction

另一個常見的證明方法就是所謂的"數學歸納法". 其實數學歸納法牽涉到建立整數系的 axiom (公設), 不過這裡我們不去談論這些公設邏輯的問題. 而著重於理解並正確使用數學歸納法. 我們將介紹三種數學歸納法, 雖然它們看起來不大一樣, 不過背後的原理是相同的, 事實上它們是等價的.

數學的理論證明其實根源是一些大家都能接受但無法證明的 axiom (公設). 介紹數學歸納法之前, 我們先了解所謂 *well-ordering principle.* 它是可以用其他的公設來證明的, 不過由於我們目前不想牽涉到這方面的課題. 所以我們直接把 well-ordering principle 當成是一個公設. 也就是說它和我們的直觀吻合, 所以我們相信它而不去證明.

所謂 well-ordering 字面上的解釋是"好的排序"的意思, 這個排序原理簡單來說是:「將一些正整數收集起來所成的非空集合中, 一定有一個最小的元素」. 相信大家應該不會覺得這個 principle (原則) 不對吧! 直觀上, 自然數是有最小元素 1 的, 所以有下界. 因此大家應不會懷疑這集合裡會有最小的元素. 問題是這集合可能有無窮多的元素, 我們可能無法真正找出這最小元素來, 不過我們相信它一定存在.

接下來我們來看, 最基本的第一種數學歸納法.

Theorem 2.3.1 (Mathematical Induction)**.** 假設以下兩個 *statement* 是對的

(1) $P(1)$ 成立

(2) 若 $k \in \mathbb{N}$ 且 $P(k)$ 成立, 則 $P(k+1)$ 成立

那麼對任意正整數 n, $P(n)$ 皆成立.

Proof. 由於我們不可能直接證明所有的正整數 n 都會使得 $P(n)$ 成立, 所以我們用反證法. 也就是說假設 (1), (2) 是對的以及「對任意正整數 n, $P(n)$ 皆成立」是錯的來得到矛盾.「對任意正整數 n, $P(n)$ 皆成立」是錯的, 亦即「存在正整數 n, 使得 $P(n)$ 不成立」. 因此我們可以將使得 $P(n)$ 不成立的這些正整數 n 收集起來. 因為它不是空集合, 故由 well-ordering principle 知, 必存在最小的正整數 m 使得 $P(m)$ 不成立. 由 (1) 我們知 $P(1)$ 成立, 故得 $m \neq 1$. 也就是說 m 為大於 1 的正整數. 現由於 $m-1$ 為正整數且 $m-1 < m$, 故由 m 為使得 $P(m)$ 不成立的最小正整數之假設知 $P(m-1)$ 成立. 然而由 (2) 知, 當 $P(m-1)$ 成立時, $P((m-1)+1) = P(m)$ 必成立. 此與 $P(m)$ 不成立之假設相矛盾. 故知不可能存在正整數 n, 使得 $P(n)$ 不成立, 也就是說對任意正整數 n, $P(n)$ 皆成立. □

數學歸納法是很好理解的, 它是說由 (1) 知 P(1) 是對的, 將 (2) 代 $k = 1$ 的情況, 故由 $P(1)$ 對可推得 $P(2)$ 是對的. 接著代 $k = 2$ 的情況, 由 $P(2)$ 是對的推得 $P(3)$ 是對的. 這樣一直下去. 所以 $P(1)$ 的起頭非常重要. 另外要強調的是 (2) 指的是假設 $P(k)$ 對推得 $P(k+1)$ 是對的. 所以它並不是要證明 $P(k)$ 是對的, 你也不必擔心 $P(k)$ 到底對不對, 只要想法子利用 $P(k)$ 是對的假設證出 $P(k+1)$ 是對的. 若你沒辦法單純由 $P(k)$ 是對的推得 $P(k+1)$ 是對的, 那基本上就無法用數學歸納法證明了. 例如考慮多項式 $f(x) = x^2 + x + 41$. 當我們代 $x = 1$ 時 $f(1) = 43$ 為質數. 代 $x = 2$, 得 $f(2) = 47$ 仍為質數. $f(3) = 53$, $f(4) = 61$,