

$|I_n| \leq |I_m|$ 且 $|I_n| \neq |I_m|$, 所以我們有 $|I_n| < |I_m|$. 另外當 A 為 infinite set, 依定義對任意 $n \in \mathbb{N}$ 皆有 $|I_n| \leq |A|$ 但 $|I_n| \neq |A|$, 因此我們有 $|I_n| < A$. 現若 B 為 finite set, 我們知存在 $n \in \mathbb{N}$ 使得 $|B| = |I_n|$, 所以得 $|B| < |A|$. 因此這樣的 strict order 頗符合我們直觀對集合計數的想法.

5.5. Countable and Uncountable Sets

一個 finite set 的 cardinal number, 我們知道就是其元素的個數, 但對於 infinite set, 其 cardinal number 並不是只有一種“無窮大”而已. 事實上會有無窮多個 infinite set 它們的 cardinal number 都相異, 也就是說利用 cardinal number, 我們有可以把“無窮大”區分成好幾種. 不過在本講義中, 我們不會深入的討論這個問題. 我們僅談論最簡單的區分方法, 即分成 countable set 和 uncountable set 兩種.

Definition 5.5.1. 假如 S 是一個 set 滿足 $|S| \leq |\mathbb{N}|$, 則稱 S 為 *countable set*. 反之則稱為 *uncountable set*.

Question 5.16. 假設 S, T 為 sets 且 $|S| \leq |T|$. 若 T 為 *countable*, 是否可知 S 為 *countable*?

簡單來說, 若存在一個 one-to-one function $f: S \rightarrow \mathbb{N}$, 則 S 就是一個 countable set. 由此定義我們知道若 S 是 finite set, 那一定是 countable. 不過有可能一個 infinite set 也是 countable, 例如 \mathbb{N} 本身, 或是如 $2\mathbb{N}$ (正的偶數所成的集合), 都是 infinite set 且為 countable. 不過 uncountable set 就一定會是 infinite set. 所以當一個 infinite set 是 countable 時, 我們會將之稱為 *countably infinite* 特別將這種 infinite set 和 uncountable set 區分出來.

首先我們要關注的是, 在 finite set 和 \mathbb{N} 之間是否還有其他的 cardinal number? 答案是否定的. 也就是說對於 infinite set 來說 $|\mathbb{N}|$ 就是最小的 cardinal number. 現假設 S 是一個 infinite set 且 $|S| \leq |\mathbb{N}|$. 依定義存在一個 one-to-one function $f: S \rightarrow \mathbb{N}$. 考慮 $T = f(S)$, 我們可以將 f 視為是一個由 S 到 T 的 one-to-one 且 onto 的函數, 所以 $|S| = |T|$. 由於 T 是 \mathbb{N} 的 infinite subset, 所以我們若能證明此時 $|T| = |\mathbb{N}|$, 那麼就有 $|S| = |T| = |\mathbb{N}|$, 也就是說所有的 countably infinite set 其 cardinal number 皆等於 $|\mathbb{N}|$.

Lemma 5.5.2. 假設 $T \subseteq \mathbb{N}$ 且為 *infinite set*, 則 $|T| = |\mathbb{N}|$.

Proof. 由於 $T \subseteq \mathbb{N}$, 我們知 $|T| \leq |\mathbb{N}|$. 現只要證明存在 $f: \mathbb{N} \rightarrow T$ 為 one-to-one function, 則由此知 $|\mathbb{N}| \leq |T|$, 故由 Theorem 5.4.6 (Cantor–Schröder–Bernstein) 得證 $|T| = |\mathbb{N}|$.

這裡我們要利用 \mathbb{N} 在一般的 order \leq 之下是一個 well-ordered set (Well-ordering Principle) 來證明. 回顧一下, 這表示每一個 \mathbb{N} 的 nonempty subset 都有 least element (或 minimum element). 若 S 為 nonempty subset of \mathbb{N} , 我們用 $\min(S)$ 表示 S 的 least element, 也就是說, 若 $a = \min(S)$, 表示 $a \in S$ 且對於任意 S 中的元素 s , 若 $s \neq a$, 則 $a < s$.

首先令 $f(1) = \min(T)$, 我們有 $f(1) \in T$. 如何定 $f(2)$ 呢? 很自然的我們考慮 $T_2 = T \setminus \{f(1)\}$, 然後令 $f(2) = \min(T_2)$. 注意此時 $T_2 \neq \emptyset$, 否則會有 $T \subseteq \{f(1)\}$ 此和 T 為 infinite set 之前題相矛盾, 所以我們得到 $f(2) \in T$. 如此一直下去, 我們令 $T_{n+1} = T \setminus \{f(1), \dots, f(n)\}$ 且令 $f(n+1) = \min(T_{n+1})$, 這樣“大致”就定義出一個由 \mathbb{N} 到 T 的 function $f: \mathbb{N} \rightarrow T$ 了.

當然我們要說明這樣定出的真的是一個 “well-defined” function, 且要證明其為 one-to-one. 首先檢查 well-defined. 也就是我們要說明對於任意 $n \in \mathbb{N}$ 皆存在唯一的 $t_n \in T$ 滿足 $f(n) = t_n$. 由於當初我們定義 f 的方法是類似用歸納法的手法定義的, 所以這裡的證明很自然的是要用到數學歸納法. 我們要用數學歸納法證明對所有 $n \in \mathbb{N}$, 皆存在唯一的 $t_n \in T$ 滿足 $f(n) = t_n$. 當 $k = 1$ 時, 我們知 $t_1 = \min(T)$ 是 T 中唯一滿足 $t_1 \leq t, \forall t \in T$ 的元素, 所以確實 $f(1) = t_1 \in T$ 而且是唯一的. 現假設對於任意 $k = 1, \dots, n$ 皆有唯一的 $t_k \in T$ 使得 $f(k) = t_k$. 現考慮 $f(n+1)$, 依定義 $T_{n+1} = T \setminus \{f(1), \dots, f(n)\} = T \setminus \{t_1, \dots, t_n\}$ 且 $f(n+1) = \min(T_{n+1})$. 由於 T 為 infinite set, 我們知 $T_{n+1} \neq \emptyset$, 否則會造成 $T \subseteq \{t_1, \dots, t_n\}$ 此與 T 為 infinite set 相矛盾. 又因前面歸納法假設 T_{n+1} 是一個可以被唯一確定的集合 (因 t_1, \dots, t_n 皆已被唯一確定), 所以利用 \mathbb{N} 的 well-ordering principle, 我們知 $t_{n+1} = \min(T_{n+1})$ 必屬於 T 且唯一. 因此由 Strong Mathematical Induction (Corollary 2.3.6) 得證對所有 $n \in \mathbb{N}$, 皆存在唯一的 $t_n \in T$ 滿足 $f(n) = t_n$.

我們已知 $f: \mathbb{N} \rightarrow T$ 是一個 function, 接著要證明 $f: \mathbb{N} \rightarrow T$ 是 one-to-one. 也就是說任取 $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ 且 $n_1 \neq n_2$, 我們要說明 $f(n_1) \neq f(n_2)$. 不失一般性, 我們假設 $n_1 < n_2$. 此時由於 $T_{n_2} = T \setminus \{f(1), \dots, f(n_1), \dots, f(n_2-1)\}$, 亦即 $f(n_1) \notin T_{n_2}$, 當然由 $f(n_2) = \min(T_{n_2}) \in T_{n_2}$ 得知 $f(n_2) \neq f(n_1)$. 得證 $f: \mathbb{N} \rightarrow T$ 是 one-to-one. \square

如前所述, 由 Lemma 5.5.2 我們證得了以下定理.

Theorem 5.5.3. 假設 S 為一個 set. 則 S 為 countably infinite 若且唯若 $|S| = |\mathbb{N}|$.

Question 5.17. 假設 S 為 infinite set. 試證明 S 為 uncountable 若且唯若 $|S| \neq |\mathbb{N}|$.

依照 countable set 的定義, 我們知道任意一個 countable set 的 subset 仍為 countable. 這是因為若 S 為 countable, 則依定義我們有 $|S| \leq |\mathbb{N}|$, 也因此若 $S' \subseteq S$, 則由 $|S'| \leq |S|$ 以及 $|S| \leq |\mathbb{N}|$, 可得 $|S'| \leq |\mathbb{N}|$. 不過要注意的是比 countable set 大的集合, 仍有可能是 countable. 我們有以下的情形.

Proposition 5.5.4. 有限多個 countable set 的聯集仍為 countable set. 亦即若 S_1, \dots, S_n 為 countable set, 則 $\bigcup_{i=1}^n S_i$ 仍為 countable set.

Proof. 我們用數學歸納法證明. 首先證明若 S_1, S_2 為 countable, 則 $S_1 \cup S_2$ 為 countable.

依定義 S_1, S_2 是 countable, 故存在 $f_1: S_1 \rightarrow \mathbb{N}$ 以及 $f_2: S_2 \rightarrow \mathbb{N}$ 皆為 one-to-one functions. 現定義新的 function $f: S_1 \cup S_2 \rightarrow \mathbb{N}$, 其定義為

$$f(s) = \begin{cases} 2f_1(s), & \text{if } s \in S_1; \\ 2f_2(s) + 1, & \text{if } s \in S_2 \setminus S_1. \end{cases}$$

很清楚的, f 是 well-defined function, 因為 $S_1 \cup S_2 = S_1 \cup (S_2 \setminus S_1)$ 以及 $S_1 \cap (S_2 \setminus S_1) = \emptyset$, 因此對任意 $s \in S_1 \cup S_2$, s 一定會在 S_1 和 $S_2 \setminus S_1$ 其中一個, 且不會同時皆在其中. 而當 $s \in S_1$, $f_1(s)$ 的取值是明確確定的 (因 $f_1: S_1 \rightarrow \mathbb{N}$ 是一個 function), 所以此時 $f(s)$ 取值 $2f_1(s)$ 亦確定. 同理當 $s \in S_2 \setminus S_1$, 因 $s \in S_2$, $f_2(s)$ 的取值是明確確定的, 所以此時 $f(s)$ 取值 $2f_2(s) + 1$ 亦確定. 我們剩下要證明 $f: S_1 \cup S_2 \rightarrow \mathbb{N}$ 是 one-to-one, 也就是要證明任取 $s, t \in S_1 \cup S_2$ 其

中 $s \neq t$, 皆會有 $f(s) \neq f(t)$. 我們分成兩種 cases. 第一種情形就是 s, t 同屬於 S_1 或是同屬於 $S_2 \setminus S_1$. 此時我們分別有 $f(s) = 2f_1(s) \neq 2f_1(t) = f(t)$ (因 f_1 為 one-to-one), 以及 $f(s) = 2f_2(s) + 1 \neq 2f_2(t) + 1 = f(t)$ (因 f_2 為 one-to-one). 第二種情況是 $s \in S_1$ 但 $t \in S_2 \setminus S_1$ 或是 $t \in S_1$ 但 $s \in S_2 \setminus S_1$. 此時由於 $f(s), f(t)$ 必為一奇一偶, 故亦得 $f(s) \neq f(t)$. 我們證得了 $f: S_1 \cup S_2 \rightarrow \mathbb{N}$ 為 one-to-one, 故證得 $S_1 \cup S_2$ 為 countable.

接著我們要用數學歸納法證明, 對於任意 $n \in \mathbb{N}$ 且 $n \geq 2$, 若 S_1, \dots, S_n 為 countable set, 則 $\bigcup_{i=1}^n S_i$ 仍為 countable set. 我們考慮 $n = k + 1$ 的情形. 利用歸納假設, S_1, \dots, S_k 為 countable set, 所以 $\bigcup_{i=1}^k S_i$ 為 countable set. 現又若 S_{k+1} 為 countable set, 利用上面證過 $k = 2$ 的情形, 我們知 $(\bigcup_{i=1}^k S_i) \cup S_{k+1}$ 為 countable set. 故由 $\bigcup_{i=1}^{k+1} S_i = (\bigcup_{i=1}^k S_i) \cup S_{k+1}$ 得證 $\bigcup_{i=1}^{k+1} S_i$ 為 countable set. \square

Proposition 5.5.4 有許多應用, 最簡單的一種就是證得所有整數所成的集合為 countable. 這是因為所有的整數可視為正整數, 負整數以及 0 所成的集合的聯集. 然而負整數所成的集合和正整數所成的集合 \mathbb{N} 有一個一對一的對應關係 (即 $-n \mapsto n$), 所以是 countable. 而 $\{0\}$ 是 finite set, 亦為 countable, 因此得證

Corollary 5.5.5. \mathbb{Z} is countable.

其實有理數所成的集合 \mathbb{Q} 也是 countable, 我們首先看一個簡單的定理.

Lemma 5.5.6. The Cartesian product $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ is countable.

Proof. 回顧一下 $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ 的元素為任意的數對 (n_1, n_2) , 其中 $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$, 而且 $(n_1, n_2) = (n'_1, n'_2)$ 若且唯若 $n_1 = n'_1$ 且 $n_2 = n'_2$. 現考慮函數 $f: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, 其定義為

$$f(n_1, n_2) = 2^{n_1} 3^{n_2}, \quad \forall n_1, n_2 \in \mathbb{N}.$$

很容易知道 $f: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ 為 function, 我們僅要檢驗 f 為 one-to-one. 現若 $(n_1, n_2) \neq (n'_1, n'_2)$, 由整數的唯一分解性質我們知

$$f(n_1, n_2) = 2^{n_1} 3^{n_2} \neq 2^{n'_1} 3^{n'_2} = f(n'_1, n'_2).$$

得證 $f: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ 為 one-to-one, 故 $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ 是 countable. \square

Lemma 5.5.6 證明了 $|\mathbb{N} \times \mathbb{N}| \leq |\mathbb{N}|$, 不過我們很容易理解 $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ 為 infinite set, 所以 $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ 為 countably infinite, 亦即 $|\mathbb{N} \times \mathbb{N}| = |\mathbb{N}|$. Proposition 5.5.6, 最常見的應用是可以推得有限多個 countable set 的 Cartesian product 仍為 countable.

Proposition 5.5.7. 若 S_1, \dots, S_n 為 countable set, 則 $S_1 \times S_2 \times \dots \times S_n$ 仍為 countable set.

Proof. 首先我們證明 $S_1 \times S_2$ 為 countable. 利用 S_1, S_2 為 countable 的假設, 我們知道存在 $f_1: S_1 \rightarrow \mathbb{N}$, $f_2: S_2 \rightarrow \mathbb{N}$ 皆為 one-to-one function. 現考慮 $f: S_1 \times S_2 \rightarrow \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ 其定義為

$$f(s_1, s_2) = (f_1(s_1), f_2(s_2)), \quad \forall s_1 \in S_1, s_2 \in S_2.$$

很容易知道 $f: S_1 \times S_2 \rightarrow \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ 為 function, 我們僅要檢驗 f 為 one-to-one. 對於任意 $(s_1, s_2), (s'_1, s'_2) \in S_1 \times S_2$ 且 $(s_1, s_2) \neq (s'_1, s'_2)$, 我們知 $s_1 \neq s'_1$ 或 $s_2 \neq s'_2$. 現若 $s_1 \neq s'_1$, 由 $f_1: S_1 \rightarrow \mathbb{N}$ 為 one-to-one, 知 $f_1(s_1) \neq f_1(s'_1)$, 故此時

$$f(s_1, s_2) = (f_1(s_1), f_2(s_2)) \neq (f_1(s'_1), f_2(s'_2)) = f(s'_1, s'_2).$$

同理當 $s_2 \neq s'_2$ 時, 亦可得 $f(s_1, s_2) \neq f(s'_1, s'_2)$. 得證 $f: S_1 \times S_2 \rightarrow \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ 為 one-to-one. 亦即 $|S_1 \times S_2| \leq |\mathbb{N} \times \mathbb{N}| = |\mathbb{N}|$, 因此證明了 $S_1 \times S_2$ 為 countable.

至於當 S_1, \dots, S_n 為 countable set, 則利用 $S_1 \times S_2 \times \dots \times S_n = (S_1 \times S_2 \times \dots \times S_{n-1}) \times S_n$ 以及數學歸納法可證明 $S_1 \times S_2 \times \dots \times S_n$ 為 countable set, 我們就不多做說明了. \square

Question 5.18. 給定 $n \in \mathbb{N}$, 試證明所有次數小於 n 的整係數多項式所成的集合為 countable.

我們可以利用 Proposition 5.5.7 證明有理數所成的集合 \mathbb{Q} 為 countable. 這是因為有理數除了 0 以外都可以唯一寫成 a/b 其中 $a \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{N}$ 且 $\gcd(a, b) = 1$ 的形式 (我們稱此為最簡分數). 所以考慮 $f: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$, 定義為 $f(0) = (0, 1)$; 而當 $q \in \mathbb{Q}$, $q \neq 0$ 且 a/b 為 q 的最簡分數時, 則定義 $f(q) = (a, b)$. 由非零有理數最簡分數表法的唯一性, 我們知 $f: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ 為 function. 而若 $q \neq q'$, 當 q, q' 其中有一個為 0 時, 我們知道另一個不為 0, 故其最簡分數不可能寫成 $0/1$, 因此此時 $f(q) \neq f(q')$. 而若 q, q' 皆不為 0 時, 設其最簡分數分別為 $q = a/b, q' = a'/b'$. 由於 $a/b \neq a'/b'$, 我們知 $f(q) = (a, b) \neq (a', b') = f(q')$. 因此知 $f: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ 為 one-to-one, 得證 $|\mathbb{Q}| \leq |\mathbb{Z} \times \mathbb{N}|$. 由 \mathbb{Z} 為 countable 以及 Proposition 5.5.7 知 $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ 為 countable, 又 $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ 為 infinite set, 故 $|\mathbb{Z} \times \mathbb{N}| = |\mathbb{N}|$. 因此 $|\mathbb{Q}| \leq |\mathbb{N}|$, 得證以下的定理.

Corollary 5.5.8. \mathbb{Q} is countable.

利用 Lemma 5.5.6, 我們也可將 Proposition 5.5.4 推廣到更一般情況.

Proposition 5.5.9. 若對任意 $i \in \mathbb{N}$, S_i 皆為 countable set, 則 $\bigcup_{i=1}^{\infty} S_i$ 仍為 countable set.

Proof. 依假設, 對任意 $i \in \mathbb{N}$, 皆存在 $f_i: S_i \rightarrow \mathbb{N}$ 為 one-to-one function. 現考慮 $f: \bigcup_{i=1}^{\infty} S_i \rightarrow \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ 定義為, 對任意 $s \in \bigcup_{i=1}^{\infty} S_i$, 若 i 為最小的正整數滿足 $s \in S_i$, 則令 $f(s) = (i, f_i(s))$. 很容易驗證 $f: \bigcup_{i=1}^{\infty} S_i \rightarrow \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ 為 function. 現對任意 $s, s' \in \bigcup_{i=1}^{\infty} S_i$, 假設 i, i' 分別為最小的正整數滿足 $s \in S_i, s' \in S_{i'}$. 若 $i \neq i'$, 自然得 $f(s) = (i, f_i(s)) \neq (i', f_{i'}(s')) = f(s')$. 而若 $i = i'$, 則因 $s, s' \in S_i$ 且 $f_i: S_i \rightarrow \mathbb{N}$ 為 one-to-one, 我們有 $f_i(s) \neq f_i(s')$, 故 $f(s) = (i, f_i(s)) \neq (i, f_i(s')) = f(s')$. 得證 $f: \bigcup_{i=1}^{\infty} S_i \rightarrow \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ 為 one-to-one, 即 $|\bigcup_{i=1}^{\infty} S_i| \leq |\mathbb{N} \times \mathbb{N}| = |\mathbb{N}|$. 證得 $\bigcup_{i=1}^{\infty} S_i$ 為 countable set. \square

Question 5.19. 試證明所有整係數多項式所成的集合為 countable.

目前我們處理的都是 countable sets, 是否存在著 uncountable set 呢? 答案是肯定的. 例如 Proposition 5.5.7 中 Cartesian product 並不能如聯集一樣推廣到無窮多個集合的情

形. 也就是說有可能 S_1, \dots, S_n, \dots 為 countable 但是 $S_1 \times \dots \times S_n \times \dots$ 為 uncountable. 還有 \mathbb{N} 的 power set $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ 也是 uncountable. 回顧一下, 一個集合 A 的 power set $\mathcal{P}(A)$, 即為 A 的所有 subsets 所成的集合. 首先我們有以下的結果.

Theorem 5.5.10. 假設 A 為一個 set, $\mathcal{P}(A)$ 為 A 的 power set, 則 $|A| < |\mathcal{P}(A)|$.

Proof. 考慮函數 $\iota: A \rightarrow \mathcal{P}(A)$ 定義為 $\iota(a) = \{a\}$, $\forall a \in A$. 我們很容易看出 $\iota: A \rightarrow \mathcal{P}(A)$ 為 one-to-one function, 因此得 $|A| \leq |\mathcal{P}(A)|$. 所以要證明 $|A| < |\mathcal{P}(A)|$, 就是要證明 $|A| \neq |\mathcal{P}(A)|$.

我們要證明對於任何 function $f: A \rightarrow \mathcal{P}(A)$ 都不可能是 onto. 若證得這個結果就表示不可能存在 function $f: A \rightarrow \mathcal{P}(A)$ 是 one-to-one 且 onto 的, 因此得證 $|A| \neq |\mathcal{P}(A)|$. 現對於任何 function $f: A \rightarrow \mathcal{P}(A)$, 考慮 A 的一個子集合 $S = \{s \in A \mid s \notin f(s)\}$. 注意 S 是有可能為空集合, 不過不管怎樣我們都有 $S \in \mathcal{P}(A)$. 我們要說明不可能存在一個元素 $a \in A$ 使得 $f(a) = S$. 也就是說 S 不會在函數 $f: A \rightarrow \mathcal{P}(A)$ 的 image 中, 因此得到 $f: A \rightarrow \mathcal{P}(A)$ 不可能是 onto. 利用反證法, 假設 $a \in A$ 使得 $f(a) = S$. 我們檢查是否 $a \in S$. 假設 $a \in S$, 表示 $a \in f(a)$ (因 $f(a) = S$), 但依 S 的定義若 $a \in S$ 表示 $a \notin f(a)$, 因此得到矛盾, 故知 $a \notin S$. 不過由 $a \notin S$, 得 $a \notin f(a)$, 又依 S 的定義得 $a \in S$ 之矛盾. 也就是說若存在 $a \in A$ 使得 $f(a) = S$, 會造成 $a \in S$ 和 $a \notin S$ 都不可能發生的矛盾 (注意即使 S 為空集合, 這依然不成立). 所以證得 $S \in \mathcal{P}(A)$ 不在 $f: A \rightarrow \mathcal{P}(A)$ 的 image 中, 得證 $f: A \rightarrow \mathcal{P}(A)$ 不是 onto. \square

Question 5.20. 令 $A = \{1, 2, 3\}$, 考慮 $f: A \rightarrow \mathcal{P}(A)$ 定義為

$$f(1) = \{1, 2\}, \quad f(2) = \{1, 3\}, \quad f(3) = \{2\}.$$

令 $S = \{s \in A \mid s \notin f(s)\}$. 試寫下 S 為何? 並檢驗 S 不在 $f: A \rightarrow \mathcal{P}(A)$ 的 image 中.

Corollary 5.5.11. \mathbb{N} 的 power set $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ 是 uncountable.

Proof. 由 Theorem 5.5.10 知 $|\mathbb{N}| < |\mathcal{P}(\mathbb{N})|$, 所以因 cardinal number 之間是一個 partial order, $|\mathcal{P}(\mathbb{N})| \leq |\mathbb{N}|$ 不可能成立. 得證 $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ 為 uncountable. \square

我們知道有限多個 countable set 的 Cartesian product 仍為 countable (Proposition 5.5.7), 不過這對於無窮多個 countable set 的 Cartesian product 並不成立. 事實上我們有以下之結果.

Proposition 5.5.12. 對於任意 $n \in \mathbb{N}$, 令 $S_n = \{0, 1\}$. 則無窮的 Cartesian product

$$S_1 \times S_2 \times \dots \times S_n \times \dots$$

為 uncountable.

Proof. 為了符號方便起見, 令 $\mathcal{S} = S_1 \times S_2 \times \dots \times S_n \times \dots$. 我們要證明 $|\mathcal{S}| = |\mathcal{P}(\mathbb{N})|$ (亦即存在一對一且映成的函數 $f: \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{N})$), 因此由 Corollary 5.5.11 得證 \mathcal{S} 為 uncountable.

對於任意 $s = (s_1, s_2, \dots, s_n, \dots) \in \mathcal{S}$, 我們令 $f(s) = \{n \in \mathbb{N} \mid s_n = 1\} \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$. 依此定義我們得 $f: \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{N})$ 是一個 (well-defined) function. 我們要證明 f 是一對一且映成的函

數. 首先若 $s = (s_1, \dots, s_n, \dots) \neq s' = (s'_1, \dots, s'_n, \dots)$, 表示存在 $n \in \mathbb{N}$ 使得 $s_n \neq s'_n$. 也就是說如果 $s_n = 1$, 則 $s'_n = 0$, 此時依定義, 我們有 $n \in f(s)$ 但 $n \notin f(s')$, 因此得 $f(s) \neq f(s')$. 同理若 $s_n = 0$, 亦可得 $f(s) \neq f(s')$, 得證 f 為一對一. 至於映成部分, 給定 $S \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$ (亦即 $S \subseteq \mathbb{N}$), 若對於任意 $n \in \mathbb{N}$, 若 $n \in S$, 則令 $s_n = 1$; 反之, 則令 $s_n = 0$. 此時考慮 $s = (s_1, \dots, s_n, \dots) \in \mathcal{S}$, 可得 $f(s) = S$, 因此得證 f 為映成. \square

接下來我們用 Proposition 5.5.12 來證明實數所成的集合 \mathbb{R} 是 uncountable.

Proposition 5.5.13. \mathbb{R} is uncountable.

Proof. 考慮 S 為所有整數部分為 0, 而小數點後各位數是 0 或 1 所組成的實數所成的集合. 例如 $0.101101\bar{0}$ 和 $0.101101\bar{1}$ 都是 S 中的元素. 要注意我們將 S 中的元素都寫成無限小數 (若是有限小數, 我們將之寫成最後皆為 0 的無限循環小數. 例如 $0.101101 = 0.101101\bar{0}$). 也要注意 S 中不只有無限循環小數, 也有無限不循環小數 (其實無限不循環小數佔了大多數). 由 Proposition 5.5.12 我們知道 S 是 uncountable, 所以利用 $S \subseteq \mathbb{R}$, 可得 $|S| \leq |\mathbb{R}|$, 因此 $|\mathbb{R}| \leq |\mathbb{N}|$ 不可能成立 (否則會造成 $|S| \leq |\mathbb{N}|$ 的矛盾). 得證 \mathbb{R} 為 uncountable. \square

Theorem 5.5.10 的證明方法是數學家 Cantor 所提出的. 他利用類似的想法也證出實數所成的集合 \mathbb{R} 為 uncountable, 這個證明方法就留做習題.

Question 5.21. 令 S 為所有整數部分為 0, 而小數點後各位數是 0 或 1 所組成的實數所成的集合. 假設 $f: \mathbb{N} \rightarrow S$ 是一個函數. 考慮 S 中的元素 $s = 0.a_1a_2a_3\dots a_i\dots$, 其中對任意 $i \in \mathbb{N}$, 我們令 s 的小數點後第 i 位的值 a_i 為

$$a_i = \begin{cases} 1, & \text{若 } f(i) \text{ 小數點後第 } i \text{ 位為 } 0; \\ 0, & \text{若 } f(i) \text{ 小數點後第 } i \text{ 位為 } 1. \end{cases}$$

試證明 s 不在 $f: \mathbb{N} \rightarrow S$ 的 image 中, 並依此說明 S 是 uncountable.

Question 5.22. 試說明無理數所成的集合為 uncountable.

最後我們要強調, 一般來說要探討一個 infinite set S 是 countable 或是 uncountable 並不容易. 首先我們必須先用一些資訊來判斷它為 countable 或是 uncountable. 若判斷是 countable, 就必須證明它, 也就是找到一個 $S \rightarrow \mathbb{N}$ 的 one-to-one function. 而若判斷為 uncountable, 要證明其為 uncountable, 一般都是用反證法, 也就是說假設其為 countable, 然後得到矛盾. 其中最常用的方法就是如前面的證明, 說明所有 $S \rightarrow \mathbb{N}$ 的 function 都不會是 onto.