Basic Logic

其實學習數學就像學習新的語言。一些名詞的定義就像“單字”一樣，而邏輯 *logic* 就好比是將這些單字組合成一個句子所需的“文法”。一般同學在學習邏輯時，會不自覺地將一些邏輯規則以背誦的方式記憶。這會造成以後學習上許多的障礙。其實這些規則應該是潛意識內的直覺，這樣學習數學才能通行無阻。

邏輯學可以是非常抽象的，不只與數學關係密切，也與資訊科學以及哲學發展有著密切的關係。不過這裡，我們僅介紹很基本的與數學論證相關的邏輯。

1.1. Connectives

在數學中能明確知道對或錯的論述我們稱之為 *statement*。例如 $2>0$ 是一個 statement、$3<2$ 也是一個 statement；但 $x>0$ 就不是一個 statement（除非我們知道 x 是什麼）。注意一個 statement 只能是對或錯其中之一，不能是半對半錯或是有時候對有時候錯。我們稱一個 statement 的 *truth value* 為 T 當這個 statement 為對的（即 true）；反之則以 F 表示，即此 statement 為錯的（false）。

舉例來說“今天天氣很熱”不是一個 statement。為什麼呢？因為大家對熱的標準不一，除非我們明確定義“很熱”的標準（例如超過幾度）。再例如“天空打雷會下雨”這個論述我們覺得半對半錯，有時候會下有時候不會下，所以它也不是一個 statement。但如果改為“天空打雷一定會下雨”，那它便是一個 truth value 為 F 的 statement。這裡要注意，在數學上的“對”、“錯”，我們採取較嚴格的說法。也就是“一定”對才會認定它是對的；有時對、有時錯，則會認定為錯的。不過我們往往會省略“一定”這個字眼，所以雖然沒有加上一定這個字眼，在數學上當一個論述有時候對有時候錯，我們會認定它是**錯**的。例如“由 $x^2>4$, 可得 $x>2$”雖沒有加上“一定”的字眼，但我們認定它是 truce value 為 F 的 statement。

數個 statements 可以組合成一個 statement，連接這些 statements 的就是所謂 *connectives*。我們要探討經由 connectives 連結成的 statement 其對或錯的情形。

1.1.1. And. 首先介紹的便是 “and” 這一個 connective。這一個 connective 應該是大家最容易理解的一個。若 P 和 Q 皆為 statement，我們用 $P \wedge Q$ 表示「P and Q」這一個 statement（邏輯上稱為 the “conjunction” of P, Q）。$P \wedge Q$ 什麼時候是對的什麼時候是錯的呢？按照字面的意義 “and” 就是 “且” 的意思，就如同習慣用語當 P 而且 Q 都是對時我們才能說 $P \wedge Q$ 是對的；而只要 P 和 Q 其中有一個是錯的，我們便會說 $P \wedge Q$ 是錯的。例如「$2 > 0$ and $2 < 7$」是對的；而「$2 > 0$ 且 $2 > 7$」便是錯的。

我們可利用所謂的真值表 *truth table* 來表示用 connectives 連結兩個 statements 後其對錯的情況。前面提過，我們用 T 表示對 (true)；F 表示錯 (false)。所以我們有以下的 truth table：

P	Q	$P \wedge Q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

基本上 Truth table 就是將 P, Q 每個可能對錯的情況列出，然後由 P, Q 所對應的情況，寫下它們連接後的對錯情況。例如上表第三橫排為 P 為 T 且 Q 為 F，故寫下 $P \wedge Q$ 為 F。

很容易發現不管 P, Q 的對錯情況如何 $P \wedge Q$ 和 $Q \wedge P$ 的對錯情形皆相同。也就是說 $P \wedge Q$ 和 $Q \wedge P$ 在邏輯上是相等的。我們稱它們為 *logically equivalent*。

對於 logically equivalent，我們需再釐清一下說法。當 P, Q 是確定的 statements 時，$P \wedge Q$ 和 $Q \wedge P$ 也會是確定的 statements（也就是說它們對錯的情況已經固定），所以此時說 $P \wedge Q$ 和 $Q \wedge P$ 是 logically equivalent 並不是很恰當。事實上我們是將 P, Q 看成變數一樣，它們可以用任意的 statement 取代，所以此時 $P \wedge Q$ 的對錯會因為 P, Q 的不同而有所不同。故此時說 $P \wedge Q$ 是 statement 也不恰當。在本講義，當 P, Q 是可變動的情況之下，我們便稱它們利用 connectives 連結起來的結果為 “statement form”。兩個 statement forms 在所有情況之下其 truth tables 皆相同，我們便稱它們為 logical equivalent。所以我們應該說成 $P \wedge Q$ 和 $Q \wedge P$ 這兩個 statement forms 為 logically equivalent。不過為了方便起見我們常常會省略 statement form 且用 “$\sim$” 來表示兩個 statement forms 為 logically equivalent。例如我們有 $(P \wedge Q) \sim (Q \wedge P)$。

Truth table 可以幫助我們判斷許多 statements 用 connectives 連接起來後其對錯的情況。例如 $(P \wedge Q) \wedge R$ 的 truth table 為：

P	Q	R	$P \wedge Q$	$(P \wedge Q) \wedge R$
T	T	T	T	T
T	F	T	F	F
F	T	T	F	F
F	F	T	F	F
T	T	F	T	F
T	F	F	F	F
F	T	F	F	F
F	F	F	F	F

Question 1.1. 你會列出 $P \wedge (Q \wedge R)$ 的 *truth table* 嗎？

注意 $(P \wedge Q) \wedge R$ 和 $P \wedge (Q \wedge R)$ 在定義上是不一樣的。$(P \wedge Q) \wedge R$ 是先探討 $P \wedge Q$ 的對錯再和 R 連結；而 $P \wedge (Q \wedge R)$ 是先探討 $Q \wedge R$ 的對錯再和 P 連結。不過從它們的 truth table 我們知道 $((P \wedge Q) \wedge R) \sim (P \wedge (Q \wedge R))$。既然 $(P \wedge Q) \wedge R$ 和 $(P \wedge (Q \wedge R))$ 在邏輯上意義相同，以後我們就可以不必括弧直接用 $P \wedge Q \wedge R$ 表示。

1.1.2. Or. 當 P 和 Q 皆為 statement，我們用 $P \vee Q$ 表示「P or Q」這一個 statement（邏輯上稱為 the “disjunction” of P, Q）。按照字面的意義 “or” 就是 “或” 的意思。不過在我們日常用語中 “或” 有兩種用法：例如在速食店點套餐，飲料可以選擇「可樂或果汁」。這裡的 “或” 表示二者擇一，你不可以兩個都選（這種 “or” 稱為 *exclusive or*）；而遊樂園購票時規定「六歲以下或身高 105 公分以下」才可購買兒童票。這裡的 “或” 表示六歲以下和身高 105 公分以下二者有一個成立就可以，並不排除六歲以下且身高 105 公分以下同時成立的情況（這種 “or” 稱為 *inclusive or*）。在數學邏輯上，“or” 指的是後面那種 inclusive or 的說法。也就是說當 P 和 Q 其中有一個是對的 $P \vee Q$ 便是對的（並不排除 P 和 Q 皆為對的情況）。換言之，只有當 P 和 Q 都是錯的，$P \vee Q$ 才是錯的。

例如：「$4 < 5$ or $4 < 3$」這個 statement 是對的，因為 $4 < 5$ 是對的。而「$4 > 5$ or $4 > 6$」這個 statement 便是錯的，因為二者皆不成立。要注意「$4 < 5$ or $4 > 3$」這個 statement 依然是對的，雖然你會認為用 and 比較好，不過在邏輯上它依然是對的，千萬別搞錯。

我們有以下關於 $P \vee Q$ 的 truth table：

P	Q	$P \vee Q$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

Question 1.2. $P \vee Q$ 和 $Q \vee P$ 是否為 *logically equivalent statement forms*？$(P \vee Q) \vee R$ 和 $P \vee (Q \vee R)$ 是否為 *logically equivalent statement forms*？$P \vee Q \vee R$ 有意義嗎？

既然 and、or 皆為 connectives，我們可以將其混合使用。例如當 P, Q, R 為 statements 我們可以考慮如 $(P \wedge Q) \vee R$、$(P \vee Q) \wedge R$、... 等形式的 statements。如何判定它們的對錯呢？例如 $(P \wedge Q) \vee R$ 是對的就必須 $(P \wedge Q)$ 或 R 其中一個是對的。所以只要是 R 是對的，$(P \wedge Q) \vee R$ 就一定對；而若 R 是錯的那就必須 P, Q 皆對，$(P \wedge Q) \vee R$ 才會是對的。注意：千萬不要誤以為 $(P \wedge Q) \vee R$ 和 $P \wedge (Q \vee R)$ 這兩個 statement forms 是 logically equivalent。很顯然的 $P \wedge (Q \vee R)$ 是對的就必須 P 和 $Q \vee R$ 皆為對的。例如當 R 是對的時, 不管 Q 為對或錯 $Q \vee R$ 皆為對, 但還必須 P 為對才可得到 $P \wedge (Q \vee R)$ 是對的。這和前面所說「只要是 R 是對的，$(P \wedge Q) \vee R$ 就一定對」不同。所以 $(P \wedge Q) \vee R$ 和 $P \wedge (Q \vee R)$ 不是 logically equivalent statement forms。當然我們也可利用以下的 truth table 判定它們不是 logically equivalent：

P	Q	R	$P\wedge Q$	$(P\wedge Q)\vee R$
T	T	T	T	T
T	F	T	F	T
F	T	T	F	T
F	F	T	F	T
T	T	F	T	T
T	F	F	F	F
F	T	F	F	F
F	F	F	F	F

P	Q	R	$Q\vee R$	$P\wedge(Q\vee R)$
T	T	T	T	T
T	F	T	T	T
F	T	T	T	F
F	F	T	T	F
T	T	F	T	T
T	F	F	F	F
F	T	F	T	F
F	F	F	F	F

另一方面, 考慮 $(P\vee R)\wedge(Q\vee R)$ 的 truth table,

P	Q	R	$P\vee R$	$Q\vee R$	$(P\vee R)\wedge(Q\vee R)$
T	T	T	T	T	T
T	F	T	T	T	T
F	T	T	T	T	T
F	F	T	T	T	T
T	T	F	T	T	T
T	F	F	T	F	F
F	T	F	F	T	F
F	F	F	F	F	F

不難發現

$$((P\wedge Q)\vee R)\sim((P\vee R)\wedge(Q\vee R)).$$

同樣的我們可利用 truth table 檢查 $(P\vee Q)\wedge R$ 和 $(P\wedge R)\vee(Q\wedge R)$ 亦為 logically equivalent statement forms。

我們可以利用 truth table 檢驗一些 statement forms 是否為 logically equivalent。在一些有關 logic 的書也會有一些 logical equivalences 的列表讓大家檢驗。不過這些都是為了讓大家熟悉這些 connectives 以及 truth table 的運用。除了以後和論證有關的 logical equivalences 我們需要注意且會特別提醒大家要熟悉，一般來說大家不必花時間於記憶這些 logical equivalences。

最後提醒一下和 “or” 有關的數學符號 $\geq$ 和 $\leq$。在數學上 $x\geq y$ 表示 $x>y$ or $x=y$，所以 $4\geq 3$ 這一個 statement 按照 or 的邏輯規則是對的。同理 $4\leq 5$ 是對的。當然了 $4\leq 4$ 也是對的。

1.1.3. If - Then. 這是一個數學定理裡常見的 connective 但又是許多同學不甚了解而經常誤解的 connective，請務必弄清楚。當 P 和 Q 皆為 statement，我們用 $P\Rightarrow Q$ 表示「if P then Q」這一個 statement，即「若 P 則 Q」的意思 (邏輯上稱為 the “conditional” of P, Q)。要注意 $P\Rightarrow Q$ 在數學上的意涵與純粹邏輯上有所不同。主要的區別是：數學上 $P\Rightarrow Q$ 較常表達的是 P,Q 之間的因果關係 (也就是說 P,Q 通常是相關的)。這裡 P,Q 通常不是 statement, 而是如「x 為實數」這樣的 “性質”。而邏輯上將 $\Rightarrow$ 看成是一個 connective 可以連結任意的 P,Q (即使它們毫無關係)。例如數學上我們有 “if $x>3$ then $x^2>9$” 這樣的 statement (注意 $x>3$ 和 $x^2>9$ 皆不是 statement，但用 if-then 連結後，它是一個 statement)。$x>3$ 和 $x^2>9$ 是有關係的。而在邏輯上在我們有 “if $3>2$ then 2 is even” 這

樣的 statement（即使 $3>2$ 和 2 為偶數是沒有關係的）。在探討 $P \Rightarrow Q$ 在邏輯上對錯的情況之前，我們先強調它在數學理論以及推理與論證上的意涵。

在數學上，當我們說「if P then Q」意即 “當 P 成立時, Q 一定成立”。注意：為了區別性質與 statement，我們說一個性質成不成立，而不用對錯這樣的說法。這裡要強調的是，當我們說 if P then Q 表示我們僅知道如果 P 成立，則可確定 Q 一定成立。如果 P 不成立，是無法知道 Q 是否成立。所以在數學上要論述「if P then Q」我們只關心當 P 成立時，Q 是否也成立這樣的 “因果關係”。不必在意 P 不成立的情況。這一點和邏輯上的「if P then Q」看成 P,Q 這兩個 statements 的 connective 相當的不同。因為既然要讓「if P then Q」成為一個 statement，就必須明定 P,Q 在任何的對錯情況時 $P \Rightarrow Q$ 的對錯情況。另外我們也要強調 $P \Rightarrow Q$ 和 $Q \Rightarrow P$ 在數學上是完全不一樣的。有許多同學會誤以為可由 $P \Rightarrow Q$ 是對的，推得 $Q \Rightarrow P$ 是對的。這個是不正確的，事實上 $P \Rightarrow Q$ 僅表示由 P 成立可推得 Q 成立；但不表示當 P 不成立時不會使得 Q 成立。例如我們知道 if $x>3$ then $x^2 \geq 9$，但這並不表示當 $x \leq 3$ 時不會使得 $x^2 \geq 9$（事實上 $x \leq -3$ 也會使得 $x^2 \geq 9$）。也就是說我們無法由 Q（例如 $x^2 \geq 9$）成立得到 P（例如 $x \leq 3$）成立。總而言之，$P \Rightarrow Q$ 是對的，並不能確保 $Q \Rightarrow P$ 是對的。等一下我們定義「if P then Q」在邏輯上的對錯情況時，我們也會發現 $P \Rightarrow Q$ 和 $Q \Rightarrow P$ 在邏輯上也不是 equivalent statement forms。

Question 1.3. 如果我們知道 P 成立則 Q 成立。那麼當我們發現 Q 不成立時，是否可以斷言 P 也不成立？

現在我們來看在邏輯上如何定義 $P \Rightarrow Q$ 的對錯情況。從前面數學上的意義來看，當 P,Q 為 statements 時，如果 P 是對的且 Q 是對的，那麼並未違背 $P \Rightarrow Q$ 的說法。所以在這種情況我們定 $P \Rightarrow Q$ 為對。但若 P 是對的而 Q 是錯的，那麼就違背 $P \Rightarrow Q$ 的說法，所以在這種情況我們定 $P \Rightarrow Q$ 為錯。但是若 P 是錯的，如何定 $P \Rightarrow Q$ 的對錯呢？由於 $P \Rightarrow Q$ 並未論及當 P 是錯時，Q 會如何，所以當 P 是錯時，不管 Q 的對錯都未違背前述 $P \Rightarrow Q$ 的說法。此時我們就都定義 $P \Rightarrow Q$ 為對。例如 $2>3$ 是錯的且 $2^2>9$ 是錯的，但這並不違背前面所提 if $x>3$ then $x^2>9$ 這一個對的 statement。另一方面，$-4>3$ 是錯的，但 $(-4)^2>9$ 是對的，也不違背前述 if $x>3$ then $x^2>9$ 這一個對的 statement。簡單來說，在數學上 $x>3 \Rightarrow x^2>9$ 這個對的敘述，由邏輯上 $P \Rightarrow Q$ 的定義便可以解釋成：『選取任何的實數 x，都會使得 “$x>3 \Rightarrow x^2>9$” 這個 statement 是對的』。注意這裡因為 x 是給定的實數，所以「$x>3$」和「$x^2>9$」都是 statement。總而言之，關於 $P \Rightarrow Q$ 我們有以下的 truth table。

P	Q	$P \Rightarrow Q$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

Question 1.4. 試利用 *truth table* 判斷 $Q \Rightarrow P$ 和 $P \Rightarrow Q$ 是否為 *logically equivalent statement forms*？$(P \Rightarrow Q) \Rightarrow R$ 是否和 $P \Rightarrow (Q \Rightarrow R)$ 為 *logically equivalent statement forms*？又 $P \Rightarrow Q \Rightarrow R$ 是否有意義？

或許有些同學對 $P \Rightarrow Q$ 的對錯情況為何這麼定義仍有疑慮，在我們介紹 “if and only if” 這個 connective 時會再進一步說明。

最後我們補充 $P \Rightarrow Q$ 在英文上的幾種說法。除了「if P then Q」外，還有：

- 「Q if P」
- 「P implies Q」
- 「P is sufficient for Q」(意即 P 成立足以使得 Q 成立)
- 「Q is necessary for P」(意即需要 Q 成立才有可能使得 P 成立)
- 「P only if Q」(意即只有當 Q 成立時 P 才可能成立)
- 「Q whenever P」(意即每當 P 成立時 Q 都會成立)

Exercise 1.1. 試分別在以下各小題，找出使之為 true statement 的所有可能整數 n (請不要只寫答案，盡量說明理由).

(1) $n \geq 3$ and $n < 5$.

(2) $n > 3$ or $n \leq 5$.

(3) $n \geq 3$ and $n \leq 3$.

(4) $n > 3$ or $n < 3$.

Exercise 1.2. 在課堂上我們介紹了 $((P \wedge Q) \vee R) \sim ((P \vee R) \wedge (Q \vee R))$ 這稱為 distribution of disjunction over conjunction. 試利用 truth table 檢查以下的 distribution laws.

(1) $((P \wedge Q) \wedge R) \sim ((P \wedge R) \wedge (Q \wedge R))$, distribution of conjunction over conjunction.

(2) $((P \vee Q) \vee R) \sim ((P \vee R) \vee (Q \vee R))$, distribution of disjunction over disjunction.

(3) $((P \vee Q) \wedge R) \sim ((P \wedge R) \vee (Q \wedge R))$, distribution of conjunction over disjunction.

Exercise 1.3. 試分別寫下 $P \wedge (P \Rightarrow Q)$，$P \wedge (Q \Rightarrow P)$，$(P \Rightarrow Q) \Rightarrow P$，$(P \Rightarrow Q) \Rightarrow Q$ 的 truth table。並分別說明它們和哪些 statement form 是 logically equivalent。

Exercise 1.4. (Optional) 在課堂上我們提及當一個 statement P 為 T, 我們可以定它的值 $p = 1$; 若為 F, 則定 $p = 0$. 假設 P, Q 為 statement 且其值分別為 p, q.

(1) 試說明 $P \wedge Q$ 的值可表成 $p \times q$, 也可表成 $\min\{p, q\}$.

(2) 試說明 $P \vee Q$ 的值可表成 $p + q - p \times q$, 也可表成 $\max\{p, q\}$.

(3) 利用 truth table 以及 (a),(b) 的各種方法驗證 $(P \wedge P) \sim P$ 以及 $(P \vee P) \sim P$. 你覺得哪一種方法較好用？

(4) 利用 $P \wedge Q$ 和 $P \vee Q$ 的值可分別表成 $p \times q$ 和 $p + q - p \times q$. 證明 $((P \wedge Q) \vee R) \sim ((P \vee R) \wedge (Q \vee R))$ 以及 $((P \vee Q) \wedge R) \sim ((P \wedge R) \vee (Q \wedge R))$.

(5) 利用當 $a, b, c \geq 0$ 時 $\max\{a, b\} \times c = \max\{a \times c, b \times c\}$ (可嘗試證明看看), 證明 $((P \vee Q) \wedge R) \sim ((P \wedge R) \vee (Q \wedge R))$.