1.1.4. If and Only If. 當我們將 $P \Rightarrow Q$ 和 $Q \Rightarrow P$ 用 and 連接時，即 $(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P)$。我們稱之為 "$P$ if and only if Q"，用 $P \Leftrightarrow Q$ 來表示（邏輯上稱為 the "biconditional" of P, Q）。

$P \Leftrightarrow Q$ 其實是由很多 connectives 組合起來的 (以後我們會知道 $P \Rightarrow Q$ 也是如此)，所以我們可以將它看成是 connectives 組合起來的"縮寫"。會特別用縮寫，當然是它會經常被用到，特別是在數學上，所以我們依然先探討在數學上 $P \Leftrightarrow Q$ 的意義。依定義在數學上我們說 $P \Leftrightarrow Q$ 表示 $P \Rightarrow Q$ 且 $Q \Rightarrow P$。也就是說若 P 成立則 Q 一定成立，另一方面若 Q 成立則 P 一定成立。因此 P,Q 有一個成立時另一個一定也成立。換言之，$P \Leftrightarrow Q$ 表示若 Q 成立則 P 一定成立而且只有當 Q 成立時才會使得 P 成立（否則會造成 P 成立但 Q 不成立的情況）。這也是在中文我們將 $P \Leftrightarrow Q$ 稱之為"P 若且唯若 Q "（或 P 當且僅當 Q）的原因。

現在我們來看在邏輯上 $P \Leftrightarrow Q$ 的對錯情況。從前面數學上的意義來看，我們可以知道 $P \Leftrightarrow Q$ 表示 P 對則 Q 對，且 Q 對則 P 對。不會有一對一錯的情況。因此若 P,Q 有一個錯則另一個一定也是錯的。也就是說在邏輯上 $P \Leftrightarrow Q$ 是對的表示 P 和 Q 必須是同時是對的或同時是錯的。所以我們有以下關於關於 $P \Leftrightarrow Q$ 的 truth table：

P	Q	$P \Leftrightarrow Q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	T

Question 1.5. 試利用 $P \Rightarrow Q$ 以及 $Q \Rightarrow P$ 的 *truth table* 寫下 $P \Leftrightarrow Q$ 的 *truth table*。

Question 1.6. $P \Leftrightarrow Q$ 和 $Q \Leftrightarrow P$ 是否為 *logically equivalent*？$(P \Leftrightarrow Q) \Leftrightarrow R$ 和 $P \Leftrightarrow (Q \Leftrightarrow R)$ 是否為 *logically equivalent*？又 $P \Leftrightarrow Q \Leftrightarrow R$ 是否有意義？

現在我們比較一下數學上論證 $P \Rightarrow Q$、$P \Leftrightarrow Q$ 的方法。從真值表來看，要論證 $P \Rightarrow Q$，我們僅要說明 P 對的時候 Q 一定對即可（不必管 P 錯時會怎麼樣）。例如論證 $x > 1 \Rightarrow x^2 > 1$，我們只要說明 $x > 1$ 時為何 $x^2 > 1$ 即可。不必管 $x \leq 1$ 時會怎樣。至於論證 $P \Leftrightarrow Q$，依定義我們要說明 P 對的時候 Q 一定對（即 $P \Rightarrow Q$）也要說明 Q 對的時候 P 一定對（即 $Q \Rightarrow P$）。不過從 $P \Leftrightarrow Q$ 真值表來看，P 錯的時候 Q 一定錯，所以我們也可以去說明 P 錯的時候 Q 一定錯。也就是說論證 $P \Leftrightarrow Q$ 的方法，可以用說明"P 對的時候 Q 一定對"再加上"P 錯的時候 Q 一定錯"這樣的方式處理。例如論證 $x = 0 \Leftrightarrow x^2 = 0$，我們就可以說明 $x = 0$ 時 $x^2 = 0$ 再說明 $x \neq 0$ 時 $x^2 \neq 0$ 即可。關於這方面的論證，以後談"否定"的時候會更進一步說明。

最後我們補充 $P \Leftrightarrow Q$ 在英文上的幾種說法。除了「P if and only if Q」外，還有：

- 「P iff Q」
- 「P is equivalent to Q」
- 「P is necessary and sufficient for Q」

1.2. Logical Equivalence and Tautology

前面我們介紹過 logical equivalence 的概念。除了可以利用 true table 來說明兩個 statement forms 是 logical equivalent 外，我們也可以利用 logical equivalence 的一些規則推導出更多的 logical equivalences。這樣的好處是不必每次都用 Truth table 來探討有關 logical equivalence 的問題。

第一個常見的 logical equivalence 的使用規則是：我們可以將 logically equivalent 的兩個 statement forms 其中同一個變數用其他的 statement form 取代，仍可得到 logical equivalence。例如已知 $(P \wedge Q) \sim (Q \wedge P)$，我們可將 P 用 $P \Rightarrow Q$ 取代得

$$((P \Rightarrow Q) \wedge Q) \sim (Q \wedge (P \Rightarrow Q)).$$

這個規則的原因很簡單，因為既然 logically equivalent 的 statement forms 有相同的 truth table，我們將其中某個變數任意變換當然最後所得新的 statement forms 仍會有相同的 truth table。同樣的道理，我們可以將其中某個變數用兩個 (或好幾個) logically equivalent 的 statement forms 取代，最後所得新的 statement forms 仍為 logically equivalent。例如已知 $(P \wedge Q) \sim (Q \wedge P)$ 以及 $(R \vee S) \sim (S \vee R)$，所以可以將 $(P \wedge Q) \sim (Q \wedge P)$ 左邊的 P 用 $R \vee S$ 取代，而右邊的 P 用 $S \vee R$ 取代得

$$((R \vee S) \wedge Q) \sim (Q \wedge (S \vee R)).$$

還有一個常用的規則是：如果兩個 statement forms A, B 是 logically equivalent 而 B 和另一個 statement form C 也是 logically equivalent，那麼 A 和 C 也是 logically equivalent。例如我們有 $((P \wedge Q) \vee R) \sim ((Q \wedge P) \vee R)$，也有 $((Q \wedge P) \vee R) \sim (R \vee (Q \wedge P))$，故可得

$$((P \wedge Q) \vee R) \sim (R \vee (Q \wedge P)).$$

這個規則會成立的原因仍然由 truth table 的全等可以得到。

利用這些規則我們可以不必藉由 truth table 很容易推得一些 statement forms 為 logically equivalent。簡單來說我們可以將 logically equivalent 如“等號”一樣運用。我們前面學過的 logical equivalences，例如 $\wedge$ 的交換性和 $\vee$ 的交換性，即

$$(P \wedge Q) \sim (Q \wedge P), \quad (P \vee Q) \sim (Q \vee P) \tag{1.1}$$

以及 $\wedge$ 的結合性和 $\vee$ 的結合性，即

$$((P \wedge Q) \wedge R) \sim (P \wedge (Q \wedge R)), \quad ((P \vee Q) \vee R) \sim (P \vee (Q \vee R)) \tag{1.2}$$

還有 $\wedge, \vee$ 之間的分配性質，即

$$((P \wedge Q) \vee R) \sim ((P \vee R) \wedge (Q \vee R)), \quad ((P \vee Q) \wedge R) \sim ((P \wedge R) \vee (Q \wedge R)) \tag{1.3}$$

都是常用來幫助我們推導許多 logical equivalences 的工具。

Example 1.2.1. 考慮 $(P \wedge Q) \vee (P \vee Q)$ 這一個 statement form。利用式子 (1.3) 中的 $((P \wedge Q) \vee R) \sim ((P \vee R) \wedge (Q \vee R))$，將 R 用 $P \vee Q$ 取代，我們有

$$(P \wedge Q) \vee (P \vee Q) \sim ((P \vee (P \vee Q)) \wedge (Q \vee (P \vee Q))). \tag{1.4}$$

再由 $(P\vee(P\vee Q))\sim((P\vee P)\vee Q)$ 以及 $(Q\vee(P\vee Q))\sim(Q\vee(Q\vee P))\sim((Q\vee Q)\vee P)$ 得

$$((P\vee(P\vee Q))\wedge(Q\vee(P\vee Q))\sim(((P\vee P)\vee Q)\wedge((Q\vee Q)\vee P)). \tag{1.5}$$

很容易檢查 $(P\vee P)\sim P$ 以及 $(Q\wedge Q)\sim Q$，故知

$$(((P\vee P)\vee Q)\wedge((Q\vee Q)\vee P))\sim((P\vee Q)\wedge(Q\vee P))\sim(P\vee Q). \tag{1.6}$$

最後連結式子 (1.4)、(1.5)、(1.6) 得

$$((P\wedge Q)\vee(P\vee Q))\sim(P\vee Q).$$

要注意，並不是運用這些 logical equivalent 規則一定都能將 statement form 化簡。例如 $(P\wedge Q)\vee P$ 利用分配性質知會和 $(P\vee P)\wedge(Q\vee P)$ 等價。因此由 $(P\vee P)\sim P$，得 $((P\wedge Q)\vee P)\sim(P\wedge(Q\vee P))$。若再用一次分配性，會回到原來的形式，一直循環，也因此這個 statement form 無法再化簡。不過如果利用真值表會發現 $((P\wedge Q)\vee P)\sim P$（同理 $((P\wedge Q)\vee Q)\sim Q$）。

當一個 statement form 其 truth table 在任何情況之下皆為對，我們稱此 statement form 為 *tautology*。意即它是重複多餘的。例如 $P\Leftrightarrow P$ 的 truth table 為

P	$P\Leftrightarrow P$
T	T
F	T

故 $P\Leftrightarrow P$ 為 tautology。

Question 1.7. $P\Rightarrow P$, $P\Rightarrow(P\Rightarrow P)$ 和 $(P\Rightarrow P)\Rightarrow P$ 哪些為 *tautology*？

有的 tautology 並不是很明顯可以看出，例如 $(P\Rightarrow Q)\vee(Q\Rightarrow P)$ 就是 tautology。用一般直觀的想法可能不容易理解為何它是 tautology，不過利用真值表就能很容易辨識。因為 $P\Rightarrow Q$ 只有在 P 對 Q 錯時才會是錯的；但此時會造成 $Q\Rightarrow P$ 是對的。所以在任何情況 $(P\Rightarrow Q)\vee(Q\Rightarrow P)$ 都是對的。

Tautology 雖然有重複多餘的意思，但它在邏輯上仍是有意思的。它可以幫我們用另一種方法來詮釋 logically equivalent。當兩個 statement forms A,B 為 logically equivalent 時，因為 A,B 的對錯情況一致，我們有 $A\Leftrightarrow B$ 恆為對，意即 $A\Leftrightarrow B$ 為 tautology。反之，當 $A\Leftrightarrow B$ 為 tautology 時，由於 A,B 的對錯情形一致，它們有相同的 truth table，意即 $A\sim B$。我們有以下的性質：

Proposition 1.2.2. 假設 A,B 為兩個 *statement forms.* 則 A 和 B 為 *logically equivalent* 等同於 $A\Leftrightarrow B$ 為 *tautology.*

其實在前面的說明中，我們先假設 $A\sim B$ 成立推得 $A\Leftrightarrow B$ 為 tautology（即若 “$A\sim B$” 則 “$A\Leftrightarrow B$ 為 tautology”）；又由 $A\Leftrightarrow B$ 為 tautology 推得 $A\sim B$。故 Proposition 1.2.2 可以說成 $A\sim B$ 若且唯若 $A\Leftrightarrow B$ 為 tautology。

Question 1.8. 假設 A,B 為兩個 *statement forms*。若 $A\sim B$ 可否推得 $A\Rightarrow B$ 為 *tautology*？若 $A\Rightarrow B$ 為 *tautology* 可否推得 $A\sim B$？

Question 1.9. 假設 A,B,C 為 *statement forms*。若 $A \Leftrightarrow B$ 和 $B \Leftrightarrow C$ 皆為 *tautology*，是否可推得 $A \Leftrightarrow C$ 為 *tautology*？

1.3. Not and Contradiction

我們介紹 “not” 以及和 not 有關的 equivalences。本節內容分量比前面幾節重，而且許多情形很可能和你的直覺不同。希望大家能好好熟習，糾正錯誤的直覺，而將正確觀念成為你的本能反應而不是盲目地記誦。

Not 有否定和相反的意思，給定一個 statement P，我們用 $\neg P$ 來表示 not P（有的書用 $\sim P$ 或 P'）。一般稱為 “非 P”（邏輯上稱為 the “negation” of P）。它的定義就是當 P 為對時，$\neg P$ 就為錯。反之，當 P 為錯時，$\neg P$ 就為對。所以我們有以下 $\neg P$ 的 truth table：

P	$\neg P$
T	F
F	T

利用這個定義，我們馬上有

$$P \sim \neg(\neg P). \tag{1.7}$$

Not P 雖然定義簡單，但是對於由許多 connectives 連結的 statement 取 not 之後，其對錯狀況就較複雜了。例如 $\neg(P \wedge Q)$，或許很多人會誤以為是 $(\neg P) \wedge (\neg Q)$。不過檢查一下 truth table 可得：

P	Q	$P \wedge Q$	$\neg(P \wedge Q)$
T	T	T	F
T	F	F	T
F	T	F	T
F	F	F	T

P	Q	$\neg P$	$\neg Q$	$(\neg P) \wedge (\neg Q)$
T	T	F	F	F
T	F	F	T	F
F	T	T	F	F
F	F	T	T	T

很明顯看出：在 P 對 Q 錯或 P 錯 Q 對時，$\neg(P \wedge Q)$ 和 $(\neg P) \wedge (\neg Q)$ 是不同的。事實上，利用 truth table 我們可得：

$$\neg(P \wedge Q) \sim (\neg P) \vee (\neg Q). \tag{1.8}$$

我們藉由大家熟知的數學例子來理解這個事實。考慮 $0 \leq x \leq 1$，這表示 $x \leq 1$ and $x \geq 0$。它的相反，大家都知是 $x > 1$ or $x < 0$。我們可以任取一個數 x 令 P 為 $x \leq 1$ 這一個 statement，而 Q 為 $x \geq 0$。此時 $\neg P$, $\neg Q$ 分別為 $x > 1$, $x < 0$。也就是說 $0 \leq x \leq 1$ 可以用 $P \wedge Q$ 表示而 $x > 1$ or $x < 0$ 就是 $(\neg P) \vee (\neg Q)$。由此可以看出 $\neg(P \wedge Q)$ 和 $(\neg P) \vee (\neg Q)$ 為 logically equivalent；而不是 $(\neg P) \wedge (\neg Q)$（否則會得到 $x > 1$ and $x < 0$ 這個矛盾）。

我們可以用上一節有關於 statement form 的 logically equivalent 的規則來處理 not。例如將式子 (1.8) 中的 P, Q 分別用 $\neg P$ 和 $\neg Q$ 取代，可得

$$\neg((\neg P) \wedge (\neg Q)) \sim (\neg(\neg P)) \vee (\neg(\neg Q)).$$

再利用 $\neg(\neg P) \sim P$，得

$$\neg((\neg P) \wedge (\neg Q)) \sim (P \vee Q).$$

最後兩邊取 not 得

$$\neg(P\vee Q)\sim(\neg P)\wedge(\neg Q). \tag{1.9}$$

例如考慮 $x\geq 0$ 的情形，我們知它的相反為 $x<0$。若令 P, Q 分別為 $x>0, x=0$，則 $x\geq 0$ 即為 $P\vee Q$。此時 $\neg P$ 為 $x\leq 0$, $\neg Q$ 為 $x\neq 0$。而 $(\neg P)\wedge(\neg Q)$ 為 $x\leq 0$ and $x\neq 0$，即為 $x<0$ 也就是 $x\geq 0$ 的相反。

式子 (1.7), (1.8), (1.9) 對於推導和 not 有關的 statement forms 之間的 logical equivalence 相當重要。其中式子 (1.8), (1.9) 稱為 *DeMorgan's laws*。

接下來我們自然會問：怎樣的 statement form 會和 $\neg(P\Rightarrow Q)$ logically equivalent 呢？或許大家會認為是 $P\Rightarrow\neg Q$。不過利用 truth table 檢查一下，大家會發現在 P 是對的時候 $P\Rightarrow Q$ 和 $P\Rightarrow\neg Q$ 確實對錯相反；但是當 P 為錯時 $P\Rightarrow Q$ 和 $P\Rightarrow\neg Q$ 皆為對。所以 $\neg(P\Rightarrow Q)$ 和 $P\Rightarrow\neg Q$ 並不是 logically equivalent，千萬要記住。

Question 1.10. 試寫下會使得 $x\geq 0\Rightarrow x\geq 1$ 為對的所有實數 x，也寫下會使得 $x\geq 0\Rightarrow x<1$ 為對的所有實數 x。它們是否相反呢？

大家常忽略的就是 $P\Rightarrow Q$ 中 P 錯的情況，而造成邏輯的錯誤，千萬要注意。不過另一方面，若 A, B 為 statement form 且 A 為 tautology，那麼 $\neg(A\Rightarrow B)$ 就和 $A\Rightarrow\neg B$ 為 logically equivalent。主要的原因是：A 既然全為對，那麼 $A\Rightarrow B$ 的對錯完全會和 B 的對錯完全一致了。

Question 1.11. 試寫下會使得 $x^2\geq 0\Rightarrow x>0$ 為對的所有實數 x，也寫下會使得 $x^2\geq 0\Rightarrow x\leq 0$ 為對的所有實數 x。它們是否相反呢？

要處理 $\neg(P\Rightarrow Q)$ 會和什麼為 logically equivalent，我們可以換一個角度來看 $P\Rightarrow Q$。首先回顧一下 $P\Rightarrow Q$ 較通俗的說法是 P 對則 Q 一定對。所以我們知道 Q 應該是對的，除非 P 是錯的。也就是說要不然是 Q 對、要不然就是 P 錯。這讓我們想到 $Q\vee\neg P$ 這一個 statement form。事實上用 truth table 檢驗

P	Q	$\neg P$	$Q\vee\neg P$
T	T	F	T
T	F	F	F
F	T	T	T
F	F	T	T

我們得到

$$(P\Rightarrow Q)\sim(Q\vee\neg P). \tag{1.10}$$

利用 $(Q\vee\neg P)\sim((\neg P)\vee Q)$ 以及 $\neg(\neg Q)\sim Q$，我們得 $(P\Rightarrow Q)\sim((\neg P)\vee\neg(\neg Q))$。再利用式子 (1.10) 得 $((\neg P)\vee\neg(\neg Q))\sim((\neg Q)\Rightarrow(\neg P))$，故知

$$(P\Rightarrow Q)\sim((\neg Q)\Rightarrow(\neg P)). \tag{1.11}$$

這和我們提過 $P\Rightarrow Q$ 為對，表示若 Q 為錯則 P 一定錯，相吻合。

利用式子 (1.10)，我們可得 $\neg(P \Rightarrow Q) \sim \neg(Q \vee \neg P)$。而由 DeMorgan's laws 知

$$\neg(Q \vee \neg P) \sim ((\neg Q) \wedge \neg(\neg P))$$

故得

$$\neg(P \Rightarrow Q) \sim (P \wedge (\neg Q)). \tag{1.12}$$

式子 (1.10), (1.11), (1.12) 是我們將來處理“若 P 則 Q”這種類型的論述時常用的 logical equivalences。

由式子 (1.10) 我們知道，所有的 statement form 都可以利用 logical equivalence 寫成 $\neg, \wedge, \vee$ 的組合。例如由 $P \Leftrightarrow Q$ 的定義，我們可得

$$(P \Leftrightarrow Q) \sim (Q \vee (\neg P)) \wedge (P \vee (\neg Q)). \tag{1.13}$$

再利用 $\wedge, \vee$ 的分配性（即式子 (1.3)）推得

$$(P \Leftrightarrow Q) \sim (P \wedge Q) \vee ((\neg P) \wedge (\neg Q)). \tag{1.14}$$

因此我們可以用 DeMorgan's laws、式子 (1.7) 以及 $\wedge, \vee$ 之間的關係式（式子 (1.1),(1.2), (1.3)），推導出一個 statement form 取 not 之後的 logical equivalence。例如式子（1.13）取 not 可得

$$\neg(P \Leftrightarrow Q) \sim ((\neg Q) \wedge P) \vee ((\neg P) \wedge Q).$$

有趣的是，若比較式子 (1.14) 中的 Q 用 $\neg Q$ 取代後的結果，我們得到

$$\neg(P \Leftrightarrow Q) \sim (P \Leftrightarrow \neg Q).$$

以上差不多就是我們需要了解有關“not”的性質。為了方便起見，我們將比較常用的再列出如下：

(1) $P \sim \neg(\neg P)$	(2) 若已知 $P \sim Q$ 則 $\neg P \sim \neg Q$
(3) $\neg(P \wedge Q) \sim (\neg P) \vee (\neg Q)$	(4) $\neg(P \vee Q) \sim (\neg P) \wedge (\neg Q)$
(5) $(P \Rightarrow Q) \sim ((\neg Q) \Rightarrow (\neg P)) \sim (Q \vee \neg P)$	(6) $\neg(P \Rightarrow Q) \sim (P \wedge (\neg Q))$
(7) $(P \Leftrightarrow Q) \sim (P \wedge Q) \vee ((\neg P) \wedge (\neg Q))$	(8) $\neg(P \Leftrightarrow Q) \sim (P \Leftrightarrow \neg Q) \sim (\neg P \Leftrightarrow Q)$

和 tautology 相反的是所謂的 *contradiction*（矛盾）。它指的是一個 statement form 在任何情況之下皆為錯的。當 A 為 statement form 時，$\neg A$ 的對錯完全和 A 的對錯相反，所以 $A \Leftrightarrow \neg A$ 的 truth table 在任何情況之下皆為錯，可知 $A \Leftrightarrow \neg A$ 為 contradiction。反之，若 B 為 statement form 且 $A \Leftrightarrow B$ 為 contradiction，表示在任何情況下 A 和 B 的對錯情況相反。可知 $B \sim \neg A$。因此我們有以下和 Proposition 1.2.2 相對應的性質。

Proposition 1.3.1. 假設 A, B 為兩個 *statement forms.* 則 $\neg A$ 和 B 為 *logically equivalent* 等同於 $A \Leftrightarrow B$ 為 *contradiction.*

Exercise 1.5. 試依照指定方式解決以下問題。

(1) 利用 $\vee, \wedge, \neg$ 寫出 $(P \Rightarrow Q) \Rightarrow P$ 的否定句（不需化簡）。

(2) 利用 $((P \wedge Q) \vee P) \sim P$ 說明 $\neg[(P \Rightarrow Q) \Rightarrow P]$ 和 $\neg P$ 是 logically equivalent。

(3) 敘述 Proposition 1.2.2 且利用它說明 $\big((P \Rightarrow Q) \Rightarrow P\big) \Leftrightarrow P$ 是一個 tautology。

Exercise 1.6. 將下列的 statement forms，僅利用 $\neg$ and $\vee$ 寫下與之等價的（logically equivalent）statement forms。

(1) $P \Leftrightarrow \neg Q$.

(2) $(P \vee Q) \Rightarrow (P \wedge Q)$.

(3) $(P \Rightarrow Q) \vee (Q \Rightarrow P)$.

Exercise 1.7. 我們會將 $(\neg P) \wedge (\neg Q)$ 縮寫成 $P \triangle Q$. 請僅利用 $\triangle$ 和 $\neg$ 寫下與 $P \Rightarrow Q$ 等價的 statement forms。

Exercise 1.8. 假設 A, B 為 statement forms。

(1) 若 A 為 tautology，試說明 $(A \wedge B) \sim B$ 並說明 $A \vee B$ 為 tautology。

(2) 若 A 為 contradiction，試說明 $(A \vee B) \sim B$ 並說明 $A \wedge B$ 為 contradiction。