1.4. Quantifiers

我們已經了解在已知各 statement 的對錯情況之下它們用 connective 以及 not 連接之後其對錯的狀況，我們也知道一個 statement form 的否定為何。不過一個單一的 statement，很可能就很複雜，不容易判斷對錯。例如在數學上一個 statement 常常會有一些 quantifier（量詞）出現，而增加了判斷對錯的困難度。在本節中我們將介紹常見的 quantifiers，並探討它們取否定的情形。

數學上常見的 quantifiers 有以下幾種：

- "for all"、"for every"（即對所有的），常用 $\forall$ 表示。
- "there exists"、"there is"（即存在、可以找到），常用 $\exists$ 表示。
- "there is a unique"（即存在唯一的），常用 $\exists!$ 表示。

$\exists!$ 牽涉到唯一性的問題，以後我們在談論證明方法時會提到它。這裡我們先探討 $\forall$ 和 $\exists$。首先要說明的是：在談論這些 quantifiers 時必須說明清楚是在怎樣的集合內。比方說對所有的整數和對所有的有理數就是完全不同的兩回事；而存在一個自然數和存在一個偶數也不同。不過由於我們僅介紹這些 quantifiers 的概念，而不觸及證明。所以這裡為了簡單起見我們說明的例子考慮的都是整個實數。例如我們說 $\forall x$ 或 $\exists x$，它們分別表示的就是 for all x in $\mathbb{R}$ 或 there exists an x in $\mathbb{R}$。以後就不再聲明指的是實數了。

我們先看簡單的例子：$\forall x,\ x^2 \geq 0$。指的就是所有的實數 x 皆會滿足 $x^2 \geq 0$。我們知道這個 statement 是對的，因為每一個實數 x 都對，沒有例外。這類的 statement 我們可以用以下的形式表示 "$\forall x,\ P(x)$"。這裡 $P(x)$ 指的是和 x 有關的性質（例如上例中 $P(x)$ 就是 $x^2 \geq 0$）。它指的就是所有的 x 皆會滿足 $P(x)$ 這個性質。這個 statement 要對就必須所有的 x 都對，一個都不能錯。例如 $\forall x,\ x^2 > 0$ 便是錯的（$x = 0$ 就不成立）。

類似的，我們可以用 "$\exists x,\ P(x)$" 來表示：存在 x 使得 $P(x)$ 成立。這個 statement 要對，只要能找到一個 x 使得 $P(x)$ 成立即可。注意它並沒有說有多少個會對，有可能很多；有可能只有一個，所以只要找到一個對即可（這就是英文用 there exists 的原因）。上面提過 $\forall x$, $x^2 > 0$ 是錯的；但若改為 $\exists x,\ x^2 > 0$ 便是對的（取 $x = 1$, 即可）。$\exists x,\ x^2 = 0$ 也是對的；但 $\exists x,\ x^2 < 0$ 便是錯的（因為我們僅考慮實數）。

$\forall$ 和 $\exists$ 有著有趣的關係。例如 "$\forall x,\ P(x)$" 是對的話，那麼 "$\exists x,\ P(x)$" 就一定對（只要挑隨便一個 x 即可）。不過反過來就不對。你不能隨便挑幾個 x 符合 $P(x)$，就聲稱對所有的 x 都會符合 $P(x)$。另外 $\forall$ 和 $\exists$ 在取否定時關係就更密切了。當你發現 "$\forall x,\ P(x)$" 有可能錯時，如何說明它是錯的呢？前面說過 "$\forall x,\ P(x)$" 只要有一個 x 不符合 $P(x)$ 就是錯的。所以要否定它，我們只要找到一個 x 讓 $P(x)$ 不成立即可。用符號表示就是 $\exists x,\ \neg P(x)$。例如前面提過 $\forall x,\ x^2 > 0$ 是錯的，因為我們發現 $\exists x,\ x^2 \leq 0$。

再次提醒，很多同學會誤以為："$\forall x,\ P(x)$" 的否定是 "$\forall x,\ \neg P(x)$"。雖然若 "$\forall x,\ \neg P(x)$" 是對的可以知道 "$\forall x,\ P(x)$" 是錯的。但是 "$\forall x,\ P(x)$" 是錯的，並不表示 "$\forall x,\ \neg P(x)$" 是對的。所以不能說 "$\forall x,\ P(x)$" 的否定是 "$\forall x,\ \neg P(x)$"。例如 $\forall x,\ x^2 > 0$ 是錯的；但 $\forall x,\ x^2 \leq 0$ 也是錯的。唯有 $\exists x,\ x^2 \leq 0$ 才會對。大家千萬注意，不要弄錯。總而言之我們有以下的

logical equivalence：

$$\neg(\forall x, P(x)) \sim (\exists x, \neg P(x)). \tag{1.15}$$

同理要否定 “$\exists x,\ P(x)$”，表示找不到 x 使得 $P(x)$ 成立。所以我們便需說明所有的 x 皆不滿足 $P(x)$，也就是說 $\forall x,\ \neg P(x)$。同樣的，很多同學會誤以為 “$\exists x,\ P(x)$” 的否定是 “$\exists x,\ \neg P(x)$”。這是錯的，因為找到 x 不滿足 $P(x)$ 還是有可能找到另一個 x 會滿足 $P(x)$。因此光由 “$\exists x,\ \neg P(x)$” 並不能否定 “$\exists x,\ P(x)$”。總而言之我們有以下的 logical equivalence：

$$\neg(\exists x, P(x)) \sim (\forall x, \neg P(x)). \tag{1.16}$$

Question 1.12. 試利用式子 *(1.15)* 以及 *logical equivalence* 的規則推導出式子 *(1.16)*。

我們說明一下 $\forall$ 和 $\exists$ 在習慣上用法的差異。在習慣上的用語，我們常會省略 $\forall x$。例如 $x \geq 3 \Rightarrow x^2 \geq 9$ 這一個 statement 嚴格來說應寫成 $\forall x, (x \geq 3 \Rightarrow x^2 \geq 9)$。也就是說，在邏輯上我們說這個 statement 是對的應該是對所有的實數 x 都是對的。給定一實數 x，當 $x \geq 3$ 當然可得 $x^2 \geq 9$；而當 $x < 3$ 因為它已不符合 $x \geq 3$ 的前提，我們知道此時 $x \geq 3 \Rightarrow x^2 \geq 9$ 也是對的。所以我們可以認定 $\forall x, (x \geq 3 \Rightarrow x^2 \geq 9)$ 是對的（這也是邏輯上定義 P 錯時 $P \Rightarrow Q$ 為對的用意, 希望同學能體會）。要注意的是 $\exists x$ 就絕不能省略，否則就弄不清楚是 $\forall x$ 或 $\exists x$ 了。

總而言之，當我們看到「$P(x) \Rightarrow Q(x)$」這樣的說法，可以看成「$\forall x, P(x) \Rightarrow Q(x)$」。也就是說，對所有的 x, 皆會使得 $P(x) \Rightarrow Q(x)$ 成立。由於邏輯上當 x 會使得 $P(x)$ 不成立時，$P(x) \Rightarrow Q(x)$ 依然成立，所以僅剩下那些使得 $P(x)$ 成立的 x 需要探討。也因此“對所有的 x, 皆會使得 $P(x) \Rightarrow Q(x)$ 成立”就表示那些剩下的 x（即 $P(x)$ 成立）皆會使得 $P(x) \Rightarrow Q(x)$ 成立（即 $Q(x)$ 成立）。因此在數學上對於「$P(x) \Rightarrow Q(x)$」，我們可以將之解讀為「只要 x 符合 $P(x)$ 也會符合 $Q(x)$」這種 statement。

至於 $\exists$ 的用法，就要注意了。在數學上，我們幾乎不會有「$\exists x, P(x) \Rightarrow Q(x)$」這樣的用法。這個 statement 當然在邏輯上是說得通的，也就是說存在 x 使得 “$P(x) \Rightarrow Q(x)$” 成立。讓我們分兩種情況來探討這個 statement 在邏輯上的意義。

(1) 存在 x 使得 $P(x)$ 不成立：此時利用此 x 知 $P(x)$ 不成立，也因此不管 $Q(x)$ 是否成立, $P(x) \Rightarrow Q(x)$ 是成立的。所以「$\exists x, P(x) \Rightarrow Q(x)$」這個 statement 當然是對的。也就是說，在此情況 $Q(x)$ 這個性質根本沒意義。

(2) 不存在 x 使得 $P(x)$ 不成立：此時表示對所有 x，皆會使得 $P(x)$ 成立，所以「$\exists x, P(x) \Rightarrow Q(x)$」就等同於存在 x 使得 $Q(x)$ 成立。也就是說，在此情況 $P(x)$ 這個性質根本沒意義。

由此可知，數學上應該看不到「$\exists x, P(x) \Rightarrow Q(x)$」這樣的 statement。那我們如何表達「存在一個 x 滿足由 $P(x)$ 成立可得 $Q(x)$」成立呢？因為這個 x 使得 $P(x)$ 成立，所以要 $P(x) \Rightarrow Q(x)$ 成立就表示 $Q(x)$ 也成立。因此這個說法真的很奇怪，我們應該說「存在一個 x 滿足 $P(x)$ 成立且 $Q(x)$ 成立」，即用「$\exists x, P(x) \wedge Q(x)$」來表達。例如當我們要表達 $\sqrt{10}$ 是存在的，我們可以說「存在一個大於 0 的實數 x，滿足 $x^2 = 10$」，因此應寫成

「$\exists x,(x>0)\wedge(x^2=10)$」，而不要寫成「$\exists x,(x>0)\Rightarrow(x^2=10)$」；否則找到任意小於等於 0 的 x 都會使得「$\exists x,(x>0)\Rightarrow(x^2=10)$」為對，就無法讓人知道此和 $\sqrt{10}$ 有什麼關係了。

Question 1.13. 假設 $f(x,y)$ 是一個兩個變數的多項式。「存在一實數 $a>0$ 使得 $f(a,y)=0$ 無解」這一個 *statement*，數學的表示法為何？並寫出這 *statement* 的否定。

Quantifier 有時會發生在兩個或更多變數的情形。這裡我們僅探討兩個變數的情形，更多變數的情況可以依兩個變數的情況類推下去。所謂兩個變數的情況，是形如 "$\forall x,\exists y,P(x,y)$" 的 statement。這裡 $P(x,y)$ 指的是和 x,y 有關的性質。例如微積分中，函數 $f(x)$ 在 $x=a$ 的極限為 l（即 $\lim_{x\to a}f(x)=l$）的定義 "$\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$，滿足 $0<|x-a|<\delta\Rightarrow|f(x)-l|<\varepsilon$" 就是兩個變數的情況。大致上我們會有下面四種類型的 statement：

$$(1)\forall x,\exists y,P(x,y)\quad(2)\exists x,\forall y,P(x,y)\quad(3)\forall x,\forall y,P(x,y)\quad(4)\exists x,\exists y,P(x,y).$$

(1) 指的是：對於所有的 x 皆可找到 y 使得 $P(x,y)$ 成立。注意這裡 x 的部分先講，再提存在 y，所以這個存在的 y 並不是固定的，它可能會隨著 x 的選取而變動。例如 $\forall x,\exists y,x+y=0$ 這個 statement 是對的。它說任意選取 x，皆可找到 y 滿足 $x+y=0$。這裡 y 會隨著 x 而變動，即 $y=-x$。例如 $x=1$ 時 $y=-1$，而 $x=2$ 時 $y=-2$。這裡 x,y 的先後順序很重要，千萬要注意。

(2) 指的是：存在 x 使得對所有的 y 都會滿足 $P(x,y)$。注意這裡存在的 x 先講，再提所有的 y，所以這個存在的 x 是固定的，它不可以隨著 y 而變動。例如 $\exists x,\forall y,x+y=y$ 這個 statement 是對的。它是說可以找到 x 讓任意的 y 皆滿足 $x+y=y$。這裡 x 找到後便固定下來了，即 $x=0$。不過例如在 (1) 的情形我們知道 $\forall x,\exists y,x+y=0$ 這個 statement 是對的；但若將 $\forall x$ 和 $\exists y$ 的順序交換得 $\exists y,\forall x,x+y=0$ 這個 statement 便是錯的。因為我們無法找到一個固定的 y 使的所有的 x 都會滿足 $x+y=0$。再次強調：這裡先後順序很重要。"$\forall x,\exists y,P(x,y)$" 和 "$\exists y,\forall x,P(x,y)$" 雖然只是 $\forall x$ 和 $\exists y$ 先後順序調動，但意義完全不同千萬要注意。

Question 1.14. $\exists x,\forall y,x+y=y$ 這個 *statement* 是對的，但若換成 $\forall y,\exists x,x+y=y$ 是否為對呢？又換成 $\forall x,\exists y,x+y=y$ 及 $\exists y,\forall x,x+y=y$ 哪一個對呢？

Question 1.15. 假設 $f(x,y),g(x,y)$ 皆為兩個變數的多項式。已知 "$\forall x,\exists y,f(x,y)=0$" 和 "$\exists y,\forall x,g(x,y)=0$" 皆為對。試問 $f(x,y)=0$ 和 $g(x,y)=0$ 在坐標平面上的圖形哪一個一定會包含一條水平直線？哪一個一定會和鉛直線 $x=101$ 相交？

(3) 和 (4) 的情況較為單純。(3) 指的是任取一個 x，對於任意的 y 都會使得 $P(x,y)$ 成立。利用坐標平面的看法，我們可以說平面上任一點 (x,y) 都會使得 $P(x,y)$ 成立。所以此時 $\forall x$ 和 $\forall y$ 變換順序並不會改變整個 statement。而 (4) 指的是可以找到 x 使得有一個 y 滿足 $P(x,y)$。利用坐標平面的看法，我們可以說平面上存在一點 (x,y) 使得 $P(x,y)$ 成立。因此此時 $\exists x$ 和 $\exists y$ 變換順序並不會改變整個 statement。例如若我們在 $x=3$ 時，可找到 $y=7$ 使得 $P(3,7)$ 是正確的。此時我們也可以說 $y=7$ 時，可找到 $x=3$ 使得 $P(x,y)$ 為對。

總而言之 (3)、(4) 因兩個變數的 quantifier 皆相同，所以 x,y 的先後不重要。(3) 一般會簡化成 $\forall x, y,\ P(x,y)$；而 (4) 簡化成 $\exists x, y,\ P(x,y)$。

接下來我們來看有兩個變數的 statement 取否定時 quantifier 的變化情形。在 (1) 的情形，即 "$\forall x, \exists y, P(x,y)$"。此時，我們可以把 "$\exists y, P(x,y)$" 看成是 $H(x)$ 這樣的條件。所以原 statement 可看成 $\forall x, H(x)$。利用式子 (1.15)，我們知道它的否定為 $\exists x, \neg H(x)$。然而式子 (1.16) 告訴我們 $\neg H(x) \sim (\forall y, \neg P(x,y))$。所以我們得

$$\neg(\forall x, \exists y, P(x,y)) \quad \sim \quad (\exists x, \forall y, \neg P(x,y)).$$

同理我們可得

$$\begin{aligned}
\neg(\exists x, \forall y, P(x,y)) &\quad \sim \quad (\forall x, \exists y, \neg P(x,y)) \\
\neg(\forall x, \forall y, P(x,y)) &\quad \sim \quad (\exists x, \exists y, \neg P(x,y)) \\
\neg(\exists x, \exists y, P(x,y)) &\quad \sim \quad (\forall x, \forall y, \neg P(x,y)).
\end{aligned}$$

例如前面所提，函數 $f(x)$ 滿足 $\lim_{x\to a} f(x) = l$ 的否定應為

$$\exists \varepsilon > 0, \forall \delta > 0, \neg(0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon).$$

利用式子 (1.12) 我們知

$$\neg(0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon) \quad \sim \quad ((0 < |x-a| < \delta) \wedge (|f(x) - l| \geq \varepsilon)).$$

所以 $\lim_{x\to a} f(x) = l$ 的否定應為

$$\exists \varepsilon > 0, \forall \delta > 0, (0 < |x-a| < \delta) \wedge (|f(x) - l| \geq \varepsilon).$$

Exercise 1.9. 說明 statement："$\exists y < 0,\ \forall x > 0,\ P(x,y)$", then "$\forall x > 0,\ \exists y < 0,\ P(x,y)$" 是對或錯？

Exercise 1.10. 找到一個 $P(x,y)$ 使得 statement："$\forall x < 0,\ \exists y < 0,\ P(x,y)$" 為 true；但是 statement："$\exists y < 0,\ \forall x < 0,\ P(x,y)$" 為 false。

Exercise 1.11. 請寫下以下 statement 的否定：

$$(\forall x > 0, \exists y < 0, P(x) \wedge Q(y)) \Rightarrow (\exists z \leq 0, R(x,z) \vee S(y,z)).$$

Exercise 1.12. 令 P 為 statement：If $x^2 - 3x + 2 < 0$, then $1.3 < x < 1.7$.

(1) 寫下 $\neg P$（Hint: 注意在 if-then statement 中隱含的 "$\forall x$"）。

(2) 說明 P 或 $\neg P$ 哪一個是對的。

Chapter 2

Methods of Proof

學會了簡單的邏輯後，接下來便是學習如何證明。在本章中我們將介紹一些證明的方法。這裡我們只談有關證明的一些基本原則，而不談證明的技巧。所以給的例子將會挑選淺顯易懂的證明。

2.1. IF-Then 的證明

在數學中最常看到的就是這種 $P \Rightarrow Q$ 的 statement。要證明這種 statement，我們大致上有 **direct method**、**contrapositive method** 和 **contradiction method** 三種方法。

2.1.1. Direct Method. 所謂 direct method 指的就是直接證明，也就是直接利用 P 成立的假設得到 Q 成立。(再次強調，我們不必管 P 不成立時，Q 會如何)。當我們要證明 $P \Rightarrow Q$ 時，若覺得 P 的條件已經足夠，便可以考慮使用直接證明。例如以下的例子：

Example 2.1.1. 令 p,a,b 為整數。證明 if $p \mid a$ and $p \mid b$，then $p \mid a+b$。

Proof. 由假設 $p \mid a$ 且 $p \mid b$，知存在整數 m,n 使得 $a = pm, b = pn$。故得

$$a+b = pm+pn = p(m+n).$$

因 $m+n$ 為整數，得證 $p \mid a+b$。 □

有時用直接證明的方法並不能一次到位，需要借助其他的結果幫忙才能完成。也就是說或許我們不能直接證出 $P \Rightarrow Q$，但若證得 $P \Rightarrow R$ 又證得 $R \Rightarrow Q$，此時便證得 $P \Rightarrow Q$ 了。這是因為若證得 $P \Rightarrow R$，表示 P 對的話 R 一定對。再由 $R \Rightarrow Q$ 知 R 對的話 Q 一定對，故連結而知 P 對則 Q 一定對。得證 $P \Rightarrow Q$。這種利用遞移性的證明通常有一部分是一些常用的性質或是一些（輔助）定理。例如以下的例子：

Example 2.1.2. 設 a 為正實數且 $a \neq 1$。已知若 $a^z = 1$，則 $z = 0$。證明若 x,y 為實數滿足 $a^x = a^y$，則 $x = y$。

Proof. 由於 $a>0$，對於任何實數 y，我們知 $a^y \neq 0$。故由 $a^x = a^y$，將等號兩邊除以 a^y 得 $a^{x-y}=1$。又因 $a \neq 1$，我們知道若 $a^z = 1$，則 $z=0$。故由 $a^{x-y}=1$ 可得 $x-y=0$，得證 $x=y$。 □

這個證明的例子中，我們其實是先證得 $(a^x = a^y) \Rightarrow (a^{x-y}=1)$，再由 $(a^{x-y}=1) \Rightarrow (x=y)$ 得證 $(a^x=a^y) \Rightarrow (x=y)$。其中我們用了一個大家都知道的事實：即當 a 為正實數且 $a \neq 1$，若 $a^z=1$ 則 $z=0$。這個事實是需要證明的，不過不容易用 direct method 證明，等一下我們會利用 contradiction method 來證明。

有時在 direct method 中我們可以考慮所有可能的情況，再看看哪些情況符合 P 的條件，然後證得 Q。這樣的證明方法有時稱為 *proof in cases*。例如以下的例子：

Example 2.1.3. 假設 x 為實數。證明 if $x^2-3x+2<0$，then $1<x<2$。

Proof. 由 $x^2-3x+2=(x-1)(x-2)<0$，我們知可分成以下 2 種情況：

(1) $(x-1)<0$ and $(x-2)>0$;

(2) $(x-1)>0$ and $(x-2)<0$.

(1) 的情況表示 $x<1$ 且 $x>2$。由於沒有實數 x 會同時滿足 $x<1$ 以及 $x>2$，我們知 (1) 不可能成立。故推得 (2)，即 $x>1$ 且 $x<2$，因此證得 $1<x<2$。 □

注意：在這個證明中，有些同學或許會疑惑為什麼是排除 (1)；而不直接驗證 (2) 可得 $x^2-3x+2<0$ 呢？這樣的證法是錯誤的。在我們的證明中明明白白表示：若 x 滿足 $x^2-3x+2<0$，那麼 x 一定會滿足 (1) 或是 (2)。排除 (1) 表示只有 (2) 會對，所以確定若 x 滿足 $x^2-3x+2<0$，那麼 x 一定滿足 (2)。若僅說 x 滿足 (2) 可得 $x^2-3x+2<0$，而沒有排除 (1)，這是證明 if $1<x<2$，then $x^2-3x+2<0$；而不是證 if $x^2-3x+2<0$，then $1<x<2$。千萬別搞錯。

Question 2.1. 假設 x 為實數.

(1) “若 $x^2-3x+2<0$，則 $0<x<3$” 和 “若 $x^2-3x+2<0$，則 $1.3<x<1.7$” 這兩個 *statements* 哪一個是對的？

(2) “若 $0<x<3$，則 $x^2-3x+2<0$” 和 “若 $1.3<x<1.7$，則 $x^2-3x+2<0$” 這兩個 *statements* 哪一個是對的？

Exercise 2.1. 請用以下兩種方式直接證明（Direct proof）：if n is an integer, then n^2+3n+2 is even.

(1) 將 n^2+3n+2 因式分解。

(2) 利用 proof in cases 將 n 分成奇數、偶數兩種情況。