3.3. Indexed Family

在前一節中，我們談的交集或聯集，是將其視為兩個集合間的 operation。不過當我們知道交集和聯集有所謂的結合律後，我們便可以談論多個集合的聯集與交集了。這一節中，我們藉由適當的符號與定義的推廣，將探討任意多個集合的聯集與交集問題。大致上之前談的兩個集合的交集與聯集的性質，都可以推廣到更一般的情形。不過處理無限多個集合的情況，有些地方可能和有限的情況稍有不同，要特別留意。

當我們談論有限多個集合的交集和聯集時，如果集合個數不多，例如：5 個集合 A,B,C,D,E 的交集。我們直接用 $A\cap B\cap C\cap D\cap E$ 來表示。這裡我們都可以不用括弧區分到底哪兩個集合先交集後再和其他的集合做交集，因為交集有結合律。我們也不必擔心交集的順序，因為交集有交換性。同樣的，對於聯集也是如此。當集合的個數太多時，像前面這樣一一列出集合就不切實際了。遇到這種情形，我們可以把要處理的集合一一編號。例如有 100 個集合，我們就編成 $A_1,A_2,\ldots,A_{100}$（當然了，這些 A_i 是甚麼應說明清楚）。然後這些集合的交集與聯集我們便像處理加法的 “summation” 符號，將這些集合的交集與聯集分別用 $\bigcap\limits_{i=1}^{100}A_i$, $\bigcup\limits_{i=1}^{100}A_i$ 來表示。這樣的符號底下表示的是 i 從哪一個數開始，上面表示的是到哪一個為止。所以我們要考慮 A_5, A_6, A_7, A_8 的交集和聯集就可以分別用 $\bigcap_{i=5}^{8}A_i$, $\bigcup_{i=5}^{8}A_i$ 來表示（i 寫在交集、聯集的上下或旁邊皆可）。因此一般若要談 i 從 m 到 n 的 A_i 之交集與聯集，我們便分別用 $\bigcap\limits_{i=m}^{n}A_i$, $\bigcup\limits_{i=m}^{n}A_i$ 來表示。也就是說：

$$\bigcap_{i=m}^{n}A_i=\{x:x\in A_i,\forall i,m\le i\le n\};\qquad \bigcup_{i=m}^{n}A_i=\{x:x\in A_i,\exists i,m\le i\le n\}.$$

如果有無窮多集合怎麼辦？像前面的例子，如果對所有的自然數 $i\in\mathbb{N}$，A_i 皆有定義，我們可以考慮對所有的 A_i 的交集和聯集。這時候我們一般可以學無窮級數的方法，將這些交集和聯集分別表示成 $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty}A_i$, $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}A_i$。而要表達所有 i 大於等於 m 的 A_i 之交集與聯集，我們便分別用 $\bigcap\limits_{i=m}^{\infty}A_i$, $\bigcup\limits_{i=m}^{\infty}A_i$ 來表示。也就是說：

$$\bigcap_{i=m}^{\infty}A_i=\{x:x\in A_i,\forall i,m\le i\};\qquad \bigcup_{i=m}^{\infty}A_i=\{x:x\in A_i,\exists i,m\le i\}.$$

這裡要注意：很多同學會誤以為 $\bigcap\limits_{i=m}^{\infty}A_i$, $\bigcup\limits_{i=m}^{\infty}A_i$ 是 $\bigcap\limits_{i=m}^{n}A_i$, $\bigcup\limits_{i=m}^{n}A_i$ 當 n 趨近於 ∞ 的極限。這個說法是有問題的，因為我們從未定義過“集合的極限”。

Exercise 3.9. 對於 $i\in\mathbb{N}$ 令 $B_i=\{x\in\mathbb{R}:i-1<x\le i\}$。

(1) 證明對任意 $k\in\mathbb{N}$，$B_k\cap B_{k+1}=\emptyset$ 並依此說明 $\bigcap\limits_{i=m}^{\infty}B_i=\emptyset, \forall m\in\mathbb{N}$。

(2) 對於任意正實數 x，利用正整數的 well-ordering principle 說明存在 $k\in\mathbb{N}$ 使得 $x\in B_k$ 並依此說明 $\bigcup\limits_{i=m}^{\infty}B_i$ 為何。