當遇到抽象的函數（即函數沒有具體的形式）時，有時用定義證明它是 onto 有點麻煩。接下來我們介紹一個很好用來證明一個抽象函數為 onto 的方法。

Theorem 5.3.5. 假設 $f: X \to Y$ 為 *function*。則 f 為 *onto* 若且唯若存在 $g: Y \to X$ 為 *function* 滿足 $f \circ g = \mathrm{id}_Y$。

Proof. ($\Rightarrow$) 當 $f: X \to Y$ 為 onto 時，我們要利用 f 找到一個函數 $g: Y \to X$ 滿足 $f \circ g = \mathrm{id}_Y$。這一個證明其實嚴格來說是要用 *Axiom of Choice* 來處理，不過由於我們尚未介紹過它，所以這裡的證明嚴格來說並不是很完善。希望大家知道它的證明大致上的意思即可。首先由 f 為 onto，我們知道對任意 $y \in Y$ 皆有 $f^{-1}(\{y\}) \neq \emptyset$。因此對於任意 $y \in Y$，我們定義 $g(y)$ 為非空集合 $f^{-1}(\{y\})$ 中的某一個特定元素。由此我們定義了一個從 Y 到 X 的函數 g。依此定義我們有 $f \circ g: Y \to Y$，且對於任意 $y \in Y$ 若 $g(y) = x$，則因 $x \in f^{-1}(\{y\})$，知 $f(x) = y$。也就是說 $f \circ g(y) = f(g(y)) = f(x) = y$，得證 $f \circ g = \mathrm{id}_Y$。

($\Leftarrow$) 現假設 $g: Y \to X$ 為 function 且滿足 $f \circ g = \mathrm{id}_Y$，我們要證明 $f: X \to Y$ 為 onto。也就是說對任意 $y \in Y$，要找到 $x \in X$ 使得 $y = f(x)$。然而因 $y \in Y$，我們有 $g(y) \in X$。因此若考慮 $x = g(y) \in X$，則 $f(x) = f(g(y)) = f \circ g(y) = \mathrm{id}_Y(y) = y$。得證確實存在 $x \in X$ 使得 $y = f(x)$，故知 $f: X \to Y$ 為 onto。 □

Example 5.3.6. 考慮 $X = \{1,2,3\}$、$Y = \{a,b\}$ 以及 $f: X \to Y$ 定義為 $f(1) = f(2) = a$、$f(3) = b$。依此定義 $f: X \to Y$ 為 onto。我們要找到 $g: Y \to X$ 使得 $f \circ g = \mathrm{id}_Y$。由於要定義從 Y 到 X 的函數，所以每個 Y 中的元素都要定義其如何映射。現由於 $f^{-1}(\{a\}) = \{1,2\}$，我們任取 $f^{-1}(\{a\})$ 中的一個元素。比方說取 2，因此定義 $g(a) = 2$。又由於 $f^{-1}(\{b\}) = \{3\}$ 僅有一個元素，所以我們定義 $g(b) = 3$。依此定義我們有 $g: Y \to X$ 為一個 function 且滿足 $f \circ g(a) = f(g(a)) = f(2) = a$ 以及 $f \circ g(b) = f(g(b)) = f(3) = b$。故得 $f \circ g = \mathrm{id}_Y$。

Theorem 5.3.5 可以幫我們不必用 onto 的定義處理有關 onto 的證明。例如我們有以下的性質。

Proposition 5.3.7. 若 $f_1: X \to Y$, $f_2: Y \to Z$ 皆為 *onto function*，則 $f_2 \circ f_1: X \to Z$ 亦為 *onto*。

Proof. 利用 Theorem 5.3.5，要證明 $f_2 \circ f_1: X \to Z$ 為 onto，我們僅要找到 $g: Z \to X$ 使得 $(f_2 \circ f_1) \circ g = \mathrm{id}_Z$ 即可。然而已知 $f_1: X \to Y$, $f_2: Y \to Z$ 皆為 onto，故由 Theorem 5.3.5 知存在 $g_1: Y \to X$、$g_2: Z \to Y$ 滿足 $f_1 \circ g_1 = \mathrm{id}_Y$ 以及 $f_2 \circ g_2 = \mathrm{id}_Z$。現令 $g = g_1 \circ g_2: Z \to X$，我們有 $(f_2 \circ f_1) \circ g = (f_2 \circ f_1) \circ (g_1 \circ g_2)$。利用合成函數的結合律（Proposition 5.1.6）以及 Lemma 5.1.5，我們有 $(f_2 \circ f_1) \circ (g_1 \circ g_2) = f_2 \circ (f_1 \circ g_1) \circ g_2 = f_2 \circ (\mathrm{id}_Y \circ g_2) = f_2 \circ g_2 = \mathrm{id}_Z$。得證 $(f_2 \circ f_1) \circ g = \mathrm{id}_Z$。 □

Question 5.6. 試利用 *onto* 的定義證明 *Proposition 5.3.7*。

要注意 Proposition 5.3.7 的反向不一定成立。也就是說：$f_2 \circ f_1$ 為 onto 並不表示 f_1, f_2 皆為 onto。例如在 Example 5.3.6 中 $g: \{a,b\} \to \{1,2,3\}$ 定義為 $g(a) = 2, g(b) = 3$，不是 onto；但 $f \circ g = \mathrm{id}_{\{a,b\}}$ 為 onto。不過我們有以下之結果。

Corollary 5.3.8. 若 $f_1 : X \to Y$, $f_2 : Y \to Z$ 皆為 *function* 且 $f_2 \circ f_1 : X \to Z$ 為 *onto*，則 f_2 為 *onto*。

Proof. 由 $f_2 \circ f_1 : X \to Z$ 為 onto，利用 Theorem 5.3.5 知存在 $g : Z \to X$ 滿足 $(f_2 \circ f_1) \circ g = \mathrm{id}_Z$。因此利用合成函數結合律得 $f_2 \circ (f_1 \circ g) = \mathrm{id}_Z$。現令 $g_2 = f_1 \circ g$，我們有 $g_2 : Z \to Y$ 且滿足 $f_2 \circ g_2 = f_2 \circ (f_1 \circ g) = \mathrm{id}_Z$。所以再次利用 Theorem 5.3.5 得證 $f_2 : Y \to Z$ 為 onto。 □

Question 5.7. 試利用 *onto* 的定義證明 *Corollary 5.3.8.*

要注意 Corollary 5.3.8 的反向也不一定成立。也就是說：單僅假設 f_2 為 onto 並不能保證 $f_2 \circ f_1$ 為 onto。

Question 5.8. 考慮 $X = \{a, b\}$, $Y = \{1, 2, 3\}$。試找到例子 $f_1 : X \to Y$, $f_2 : Y \to X$ 為 *functions* 其中 f_2 為 *onto*，但是 $f_2 \circ f_1$ 不是 *onto*。

和 onto 的情況一樣，我們有一個不必由定義證明一個抽象函數為 one-to-one 的方法。

Theorem 5.3.9. 假設 $f : X \to Y$ 為 *function*。則 f 為 *one-to-one* 若且唯若存在 $h : Y \to X$ 為 *function* 滿足 $h \circ f = \mathrm{id}_X$。

Proof. $(\Rightarrow)$ 當 $f : X \to Y$ 為 one-to-one 時，我們要利用 f 找到一個函數 $h : Y \to X$ 滿足 $h \circ f = \mathrm{id}_X$。首先由 f 為 one-to-one，我們知道對任意 $y \in Y$，$\#(f^{-1}(\{y\})) \leq 1$。因此對於任意 $y \in Y$，若 $f^{-1}(\{y\}) = \emptyset$ 我們定義 $h(y)$ 為 X 中某一個固定元素。而若 $f^{-1}(\{y\}) \neq \emptyset$，則 $f^{-1}(\{y\})$ 僅有一個元素。此時若 $f^{-1}(\{y\}) = \{x\}$ 我們便定義 $h(y) = x$。依此我們便定義了一個從 Y 到 X 的函數 h。依此定義我們有 $h \circ f : X \to X$ 且對於任意 $x \in X$，若 $f(x) = y$，則因 $x \in f^{-1}(\{y\})$，知 $h(y) = x$。也就是說 $h \circ f(x) = h(f(x)) = h(y) = x$，得證 $h \circ f = \mathrm{id}_X$。

$(\Leftarrow)$ 現假設 $h : Y \to X$ 為 function 且滿足 $h \circ f = \mathrm{id}_X$。我們要證明 $f : X \to Y$ 為 one-to-one，也就是說若 $x_1, x_2 \in X$ 滿足 $f(x_1) = f(x_2)$，我們要證明 $x_1 = x_2$。然而因 $x_1 \in X$，我們有 $x_1 = \mathrm{id}_X(x_1) = h \circ f(x_1) = h(f(x_1))$。同理因 $x_2 \in X$，我們有 $x_2 = h(f(x_2))$。現由假設 $f(x_1) = f(x_2) \in Y$ 以及 $h : Y \to X$ 為 function 知 $h(f(x_1)) = h(f(x_2))$。因此得證

$$x_1 = h(f(x_1)) = h(f(x_2)) = x_2.$$

□

Example 5.3.10. 考慮 $X = \{a, b\}$, $Y = \{1, 2, 3\}$ 以及 $f : X \to Y$ 定義為 $f(a) = 3$, $f(b) = 1$。依此定義 $f : X \to Y$ 為 one-to-one。我們要找到 $h : Y \to X$ 使得 $h \circ f = \mathrm{id}_X$。由於要定義從 Y 到 X 的函數，所以每個 Y 中的元素都要定義其如何映射。現由於 $f^{-1}(\{2\}) = \emptyset$，我們任取 X 中的一個元素。比方說取 a，因此定義 $h(2) = a$。又由於 $f^{-1}(\{1\}) = \{b\}$ 所以我們定義 $h(1) = b$；而 $f^{-1}(\{3\}) = \{a\}$ 所以我們定義 $h(3) = a$。依此定義我們有 $h : Y \to X$ 為一個 function 且滿足 $h \circ f(a) = h(f(a)) = h(3) = a$ 以及 $h \circ f(b) = h(f(b)) = h(1) = b$，故得 $h \circ f = \mathrm{id}_X$。

Theorem 5.3.9 可以幫我們不必用 one-to-one 的定義處理有關 one-to-one 的證明。例如我們有以下的性質。

Proposition 5.3.11. 若 $f_1 : X \to Y$, $f_2 : Y \to Z$ 皆為 *one-to-one function*，則 $f_2 \circ f_1 : X \to Z$ 亦為 *one-to-one*。

Proof. 利用 Theorem 5.3.9，要證明 $f_2 \circ f_1 : X \to Z$ 為 one-to-one，我們僅要找到 $h : Z \to X$ 使得 $h \circ (f_2 \circ f_1) = \mathrm{id}_X$ 即可。然而已知 $f_1 : X \to Y$、$f_2 : Y \to Z$ 皆為 one-to-one，故由 Theorem 5.3.9 知存在 $h_1 : Y \to X$、$h_2 : Z \to Y$ 滿足 $h_1 \circ f_1 = \mathrm{id}_X$ 以及 $h_2 \circ f_2 = \mathrm{id}_Y$。現令 $h = h_1 \circ h_2 : Z \to X$，我們有 $h \circ (f_2 \circ f_1) = (h_1 \circ h_2) \circ (f_2 \circ f_1)$。利用合成函數的結合律（Proposition 5.1.6）以及 Lemma 5.1.5，我們有 $(h_1 \circ h_2) \circ (f_2 \circ f_1) = h_1 \circ (h_2 \circ f_2) \circ f_1 = h_1 \circ (\mathrm{id}_Y \circ f_1) = h_1 \circ f_1 = \mathrm{id}_X$。得證 $h \circ (f_2 \circ f_1) = \mathrm{id}_X$。 □

Question 5.9. 試利用 *one-to-one* 的定義證明 *Proposition 5.3.11*。

要注意 Proposition 5.3.11 的反向不一定成立，也就是說 $f_2 \circ f_1$ 為 one-to-one 並不表示 f_1, f_2 皆為 one-to-one。例如在 Example 5.3.10 中 $h : \{1,2,3\} \to \{a,b\}$ 定義為 $h(1) = b, h(2) = a, h(3) = a$，不是 one-to-one；但 $h \circ f = \mathrm{id}_{\{a,b\}}$ 為 one-to-one。不過我們有以下之結果。

Corollary 5.3.12. 若 $f_1 : X \to Y$, $f_2 : Y \to Z$ 皆為 *function* 且 $f_2 \circ f_1 : X \to Z$ 為 *one-to-one*，則 f_1 為 *one-to-one*。

Proof. 由 $f_2 \circ f_1 : X \to Z$ 為 one-to-one，利用 Theorem 5.3.9 知存在 $h : Z \to X$ 滿足 $h \circ (f_2 \circ f_1) = \mathrm{id}_X$。因此利用合成函數結合律得 $(h \circ f_2) \circ f_1 = \mathrm{id}_X$。現令 $h_1 = h \circ f_2$，我們有 $h_1 : Y \to X$ 且滿足 $h_1 \circ f_1 = (h \circ f_2) \circ f_1 = \mathrm{id}_X$。所以再次利用 Theorem 5.3.9 得證 $f_1 : X \to Y$ 為 one-to-one。 □

Question 5.10. 試利用 *one-to-one* 的定義證明 *Corollary 5.3.12*。

要注意 Corollary 5.3.12 的反向也不一定成立。也就是說：單僅假設 f_1 為 one-to-one 並不能保證 $f_2 \circ f_1$ 為 one-to-one。

Question 5.11. 考慮 $X = \{a,b\}$, $Y = \{1,2,3\}$。試找到例子 $f_1 : X \to Y$, $f_2 : Y \to X$ 為 *functions* 其中 f_1 為 *one-to-one*，但是 $f_2 \circ f_1$ 不是 *one-to-one*。

最後我們來探討 one-to-one and onto 的函數。這樣的函數一般我們稱之為 *bijective function* 或 *bijection*。假設 $f : X \to Y$ 是 bijective，由 f 為 onto 知存在 $g : Y \to X$ 滿足 $f \circ g = \mathrm{id}_Y$（Theorem 5.3.5）。又由 f 為 one-to-one 知存在 $h : Y \to X$ 使得 $h \circ f = \mathrm{id}_X$（Theorem 5.3.9）。因此由結合律以及 Lemma 5.1.5，我們有

$$h = h \circ \mathrm{id}_Y = h \circ (f \circ g) = (h \circ f) \circ g = \mathrm{id}_X \circ g = g.$$

也就是說當 $f: X \to Y$ 為 bijective 時，我們可以找到 $g: Y \to X$，同時滿足 $f \circ g = \mathrm{id}_Y$ 且 $g \circ f = \mathrm{id}_X$。事實上這樣的函數 g 是唯一的。這是因為假設 $g: Y \to X$ 和 $g': Y \to X$ 皆滿足 $f \circ g = f \circ g' = \mathrm{id}_Y$ 以及 $g \circ f = g' \circ f = \mathrm{id}_X$，利用剛才相同的理由我們有

$$g' = g' \circ \mathrm{id}_Y = g' \circ (f \circ g) = (g' \circ f) \circ g = \mathrm{id}_X \circ g = g.$$

就因為這樣的函數 g 是唯一的且又和 f 有關，我們給它一個特殊的符號 f^{-1}，且稱之為 f 的 inverse。由於這個原因，我們也稱 bijective function 為 *invertible function*。

Question 5.12. 假設 $f: X \to Y$ 為 *injective*。試證明若 $g: Y \to X$ 滿足 $f \circ g = \mathrm{id}_Y$，則 $g = f^{-1}$。且證明此時若 $h: Y \to X$ 滿足 $h \circ f = \mathrm{id}_X$，則 $h = f^{-1}$。

要注意：千萬不要將 f^{-1} 和 inverse image 搞混了。一般的函數都可以定 inverse image，也就是說：不管 $f: X \to Y$ 是不是 bijective，對任意 Y 的 subset C，inverse image $f^{-1}(C)$ 都是有定義的。但對於 Y 元素 y，就只有當 f 為 bijective 時 $f^{-1}(y)$ 才有定義。所有要留意：對任意 $y \in Y$，$f^{-1}(\{y\})$ 都有定義；但 $f^{-1}(y)$ 就只有當 f 為 bijective 時才有定義。

當 $f: X \to Y$ 為 bijective 時，我們可以利用 inverse image 將 $f^{-1}: Y \to X$ 寫下。事實上：對任意 $y \in Y$，由 f 為 onto 以及 one-to-one，我們有 $\#(f^{-1}(\{y\})) = 1$。也就是說 $f^{-1}(\{y\})$ 恰有一個元素。因此若 $f^{-1}(\{y\}) = \{x\}$，則我們定義 $f^{-1}(y) = x$。依此定義，我們有 $f(x) = y$ 若且唯若 $f^{-1}(y) = x$，因此確實得 $f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_Y$ 且 $f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_X$。

Example 5.3.13. 我們探討 Example 5.3.2 中的 bijective function 其 inverse 為何.

(A) 考慮函數 $g: \mathbb{R} \setminus \{3\} \to \mathbb{R} \setminus \{1\}$ 定義為 $g(x) = (x+1)/(x-3)$, $\forall x \in X$。在 Example 5.3.2 和 Example 5.3.4 我們知 $g(x)$ 為 bijective，且在 Example 5.2.2 中我們知道對任意 $y \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$，$g^{-1}(\{y\}) = \{(3y+1)/(y-1)\}$。因此知 $g^{-1}: \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R} \setminus \{3\}$ 定義為 $g^{-1}(x) = (3x+1)/(x-1)$, $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$。

(B) 考慮函數 $f: \mathbb{Z} \to \mathbb{N} \cup \{0\}$ 定義為

$$f(n) = \begin{cases} 2n, & \text{if } n \geq 0; \\ -2n-1, & \text{if } n < 0. \end{cases}$$

在 Example 5.3.2 中我們知若 $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ 為偶數，則 $f^{-1}(\{k\}) = \{k/2\}$；而若 $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ 為奇數，則 $f^{-1}(\{k\}) = \{-(k+1)/2\}$。因此得 $f^{-1}: \mathbb{N} \cup \{0\} \to \mathbb{Z}$ 定義為

$$f^{-1}(n) = \begin{cases} n/2, & \text{if } n \text{ is even;} \\ -(n+1)/2, & \text{if } n \text{ is odd.} \end{cases}$$

我們知道當 $f: X \to Y$ 為 bijective 時，f 的 inverse 存在。反之，若 f 的 inverse 存在，即存在 $f^{-1}: Y \to X$ 使得 $f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_Y$ 且 $f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_X$，則由 Theorem 5.3.5 和 Theorem 5.3.9 知 f 為 bijective。因此我們有以下之結果.

Theorem 5.3.14. 假設 $f: X \to Y$ 為 *function*。則 f 為 *bijection* 若且唯若存在 $f^{-1}: Y \to X$ 使得 $f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_Y$ 且 $f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_X$。

Question 5.13. 假設 $f: X \to Y$ 為 *bijective function*。試證明 $f^{-1}: Y \to X$ 亦為 *bijective* 且 $(f^{-1})^{-1} = f$。

利用 Proposition 5.3.7 和 Proposition 5.3.11 我們馬上有以下的性質：

Proposition 5.3.15. 若 $f_1 : X \to Y$, $f_2 : Y \to Z$ 皆為 *bijective function*，則 $f_2 \circ f_1 : X \to Z$ 亦為 *bijective function*。且此時

$$(f_2 \circ f_1)^{-1} = f_1^{-1} \circ f_2^{-1}.$$

Proof. 其實我們只要證明 $(f_2 \circ f_1) \circ (f_1^{-1} \circ f_2^{-1}) = \mathrm{id}_Z$ 以及 $(f_1^{-1} \circ f_2^{-1}) \circ (f_2 \circ f_1) = \mathrm{id}_X$。再利用 Theorem 5.3.14 就可得 $f_2 \circ f_1 : X \to Z$ 為 bijective。又因 inverse function 的唯一性，也證得了 $(f_2 \circ f_1)^{-1} = f_1^{-1} \circ f_2^{-1}$。事實上

$$(f_2 \circ f_1) \circ (f_1^{-1} \circ f_2^{-1}) = f_2 \circ (f_1 \circ f_1^{-1}) \circ f_2^{-1} = (f_2 \circ \mathrm{id}_Y) \circ f_2^{-1} = f_2 \circ f_2^{-1} = \mathrm{id}_Z,$$

$$(f_1^{-1} \circ f_2^{-1}) \circ (f_2 \circ f_1) = f_1^{-1} \circ (f_2^{-1} \circ f_2) \circ f_1 = f_1^{-1} \circ (\mathrm{id}_Y \circ f_1) = f_1^{-1} \circ f_1 = \mathrm{id}_X.$$

得證本定理。 □

Question 5.14. 假設 $f_1 : X \to Y$, $f_2 : Y \to Z$ 皆為 *function* 且 $f_2 \circ f_1 : X \to Z$ 為 *bijective*。說明為何 $f_1 : X \to Y$ 和 $f_2 : Y \to Z$ 未必為 *bijective*？又若已知 f_1, f_2 其中有一個是 *bijective*，則另一個是否為 *bijective*？

5.4. Equivalent Sets and Cardinal Number

當我們在計算一個集合裡元素的個數時，其實是給了此集合和正整數的子集合之間的一個一對一且映成的函數關係。例如假設集合 A 有 n 個元素，當我們一個一個的數 A 的元素時，事實上就給了一個 A 到 $\{1, \ldots, n\}$ 的 bijective function。所以我們很自然的有以下的定義。

Definition 5.4.1. 假設 A, B 為 set，若存在一個 bijection $f : A \to B$，則稱 A is *equivalent* to B，且用 $|A| = |B|$ 表示。

要注意當 A 為 finite set，可以說 $|A|$ 就是指 A 的元素個數 $\#(A)$。不過由於我們不只探討 A 為 finite set 情況，所以我們用 $|A|$ 這樣的符號，且稱之為 A 的 *cardinal number*。因此我們可以說 A is equivalent to B 若且唯若 A 和 B 有一樣的 cardinal number。

Equivalent set 之間的關係事實上是一個 equivalence relation。

Proposition 5.4.2. 對於任意的 *sets* A, B, C 我們有以下的性質。

(1) $|A| = |A|$。

(2) 若 $|A| = |B|$ 則 $|B| = |A|$。

(3) 若 $|A| = |B|$ 且 $|B| = |C|$，則 $|A| = |C|$。

Proof. (1) 對任意的集合 A，考慮 $\mathrm{id}_A : A \to A$。很明顯的 id_A 為 bijective，故得 $|A| = |A|$。

(2) 若 $|A| = |B|$，表示存在 $f : A \to B$ 為 bijective。故考慮 $f^{-1} : B \to A$，亦為 bijective（參見 Question 5.13），得證 $|B| = |A|$。

(3) 若 $|A| = |B|$ 且 $|B| = |C|$，表示存在 $f : A \to B$、$g : B \to C$ 皆為 bijective。故由 Proposition 5.3.15 知 $g \circ f : A \to C$ 亦為 bijective，得證 $|A| = |C|$。 $\square$

之後為了方便起見，對於任意正整數 n，我們用 I_n 表示 1 到 n 之間所有的正整數所成的集合，亦即 $I_1 = \{1\}$, $I_2 = \{1,2\},\ldots,I_n = \{1,\ldots,n\}$。現若 A 是有 n 個元素的 finite set，我們很容易知道 $|A| = |I_n|$。因此若 A 和 B 皆有 n 個元素，我們有 $|A| = |I_n|$ 以及 $|B| = |I_n|$。因此由 Proposition 5.4.2 知 $|A| = |B|$。

另外若 A, B 皆為 finite set 但 A 的元素個數 n 不等於 B 的元素個數 m，那麼有可能 $|A| = |B|$ 嗎？我們可以先考慮 $|I_n|$ 和 $|I_m|$ 是否相等。首先由於 $n \neq m$，不失一般性，我們假設 $m > n$。現若 $|I_m| = |I_n|$，表示存在 bijection $f : I_m \to I_n$。然而由鴿籠原理 Theorem 2.2.3（想像定義域的 I_m 表示有 m 隻鴿子，對應域 I_n 表示 n 個籠子），知 $f : I_m \to I_n$ 不可能為 one-to-one （鴿子數大於籠子數，所以一定有一個籠子住了多於 1 隻的鴿子），此與 f 為 bijective 的假設相矛盾，得證 $|I_n| \neq |I_m|$。現若 $|A| = |B|$，則由 $|A| = |I_n|$ 且 $|B| = |I_m|$ 以及 Proposition 5.4.2 推得 $|I_n| = |I_m|$ 之矛盾，故知 $|A| \neq |B|$。

到目前為止，在 finite set 的情況，我們知道 cardinal number 頗符合我們對集合元素個數的計數原則。我們也可利用 cardinal number 來定義 infinite set。也就是說：因為有無窮多個元素的集合，其元素無法一個一個數完。所以對一個 nonempty set A，如果對任意 $n \in \mathbb{N}$ 皆有 $|A| \neq |I_n|$，我們稱 A 為 *infinite set*。

其實 cardinal number 還符合許多其他計數的原則。例如：若 $A \cap B = \emptyset$、$C \cap D = \emptyset$ 且 $|A| = |C|$、$|B| = |D|$，則由計數的原則，我們會預期 $|A \cup B| = |C \cup D|$。事實上這是對的，我們有以下的定理。

Lemma 5.4.3. 假設 I 為 *index set*，$\{A_i, i \in I\}$、$\{B_i, i \in I\}$ 分別為 A、B 的 *partition*。若對所有 $i \in I$，皆有 $|A_i| = |B_i|$，則 $|A| = |B|$。

Proof. 回顧一下，$\{A_i, i \in I\}$ 為 A 的 partition 表示 $A = \bigcup_{i \in I} A_i$ 且對於 $i, j \in I$，若 $i \neq j$，則 $A_i \cap A_j = \emptyset$。現依假設，對所有 $i \in I$，皆有 $|A_i| = |B_i|$。此即表示存在 $f_i : A_i \to B_i$ 為 bijective function。我們想利用這些 f_i，建構出一個 bijective function $f : A \to B$。依此便得證 $|A| = |B|$。

定義 $f : A \to B$ 如下：對於任意 $a \in A$，由於 $\{A_i, i \in I\}$ 為 A 的 partition，我們知有唯一的 $i \in I$ 使得 $a \in A_i$。此時定義 $f(a) = f_i(a) \in B_i$。由於 $\{A_i, i \in I\}$ 為 A 的 partition，在 f 的定義中每一個 A 的元素皆有定義其映射規則且 $B_i \subseteq B$。所以這確實定義出了一個從 A 到 B 的 function。我們要證明 $f : A \to B$ 為 one-to-one and onto。

現對任意 $b \in B$，由於 $\{B_i, i \in I\}$ 為 B 的 partition，故存在唯一的 $i \in I$，使得 $b \in B_i$。又因為 $f_i : A_i \to B_i$ 為 onto，故知存在 $a \in A_i$ 滿足 $f_i(a) = b$。現依 f 的定義，對於這個 b，我們只要取此 $a \in A$。則因為 $a \in A_i$，由 f 的定義得 $f(a) = f_i(a) = b$。得證 $f : A \to B$ 為 onto。

現考慮 $a, a' \in A$ 且 $a \neq a'$，設 $a \in A_i, a' \in A_j$，則依定義 $f(a) = f_i(a) \in B_i$ 且 $f(a') = f_j(a') \in B_j$。若 $i \neq j$，則因 $B_i \cap B_j = \emptyset$，知 $f_i(a) \neq f_j(a')$。故得 $f(a) \neq f(a')$。而若 $i = j$，則因 $f_i = f_j$ 為 injective 且 $a \neq a'$，得 $f_i(a) \neq f_j(a')$。故得 $f(a) \neq f(a')$。因此得證 f 為 one-to-one。 □

既然 cardinal number 和集合的元素個數有關，我們當然希望它能比較大小。在 finite set 的情況，我們都知道元素比較少的集合可以 one-to-one 的映射到元素比較多的集合。因此我們推廣到以下的定義。

Definition 5.4.4. 假設 A, B 為 set，我們用 $|A| \leq |B|$ 表示存在一個 one-to-one function $f : A \to B$。

這個定義也很符合我們的直覺。例如若 $A \subseteq B$，則考慮 $f : A \to B$，定義為 $f(a) = a$, $\forall a \in A$。很容易驗證 f 為 one-to-one function，所以在這情況之下我們有 $|A| \leq |B|$。特別的，當 $m, n \in \mathbb{N}$ 且 $m > n$，則由於 $I_n \subseteq I_m$，所以我們有 $|I_n| \leq |I_m|$。而前面我們利用鴿籠原理知道不可能有 one-to-one function $f : I_m \to I_n$，所以我們也知道 $|I_m| \leq |I_n|$ 不成立。

另外直覺上元素比較多的元素可以找到映成的函數對應到元素比較少的集合，對 cardinal number 這也是對的。我們有以下的結果。

Proposition 5.4.5. 假設 A, B 為 *set*。則 $|A| \leq |B|$ 若且唯若存在 *onto function* $h : B \to A$。

Proof. $(\Rightarrow)$ 由 $|A| \leq |B|$，我們知存在一個 one-to-one function $: A \to B$。由 Theorem 5.3.9 知存在 $h : B \to A$ 滿足 $h \circ f = \mathrm{id}_A$。然而 $\mathrm{id}_A : A \to A$ 是 onto function，故由 Corollary 5.3.8 知 $h : B \to A$ 為 onto。

$(\Leftarrow)$ 由 $h : B \to A$ 為 onto 知，存在 $g : A \to B$ 滿足 $h \circ g = \mathrm{id}_A$ (Theorem 5.3.5)。故由 id_A 為 one-to-one 得知 $g : A \to B$ 為 one-to-one (Corollary 5.3.12)。因此得證 $|A| \leq |B|$。 □

接下來我們要說明 Definition 5.4.4 定義出 cardinal number 之間的 partial order (事實上它可定義出 cardinal number 之間的 total order；不過這需用到 Axiom of Choice 而且我們之後也不會用到，所以這裡略過不談)。首先對於 reflexive 的性質：對於任意的集合 A，我們僅要考慮 $\mathrm{id}_A : A \to A$。由於 id_A 是 one-to-one，故得證 $|A| \leq |A|$。至於 transitive 的性質：若 $|A| \leq |B|$ 且 $|B| \leq |C|$，則由存在 $f : A \to B$ 以及 $g : B \to C$ 皆為 one-to-one，可得 $g \circ f : A \to C$ 為 one-to-one (Proposition 5.3.11)，故證得 $|A| \leq |C|$。至於 anti-symmetric 性質，就比較複雜。這是所謂 Cantor–Schröder–Bernstein Theorem。基本上它說的是：若存在 $f : A \to B$ 且 $g : B \to A$ 皆為 injective，則存在 $h : A \to B$ 為 bijective。由於它的證明較複雜，此處敘述其結果，證明置於附錄。

Theorem 5.4.6 (Cantor–Schröder–Bernstein)**.** 假設 A, B 為 *sets* 滿足 $|A| \leq |B|$ 且 $|B| \leq |A|$，則 $|A| = |B|$。

最後，我們可定義 cardinal number 之間的 “strict order”。當 A, B 為 sets，滿足 $|A| \leq |B|$ 且 $|A| \neq |B|$ 時，我們就用 $|A| < |B|$ 來表示。前面已知當 m, n 為正整數且 $m > n$ 時，我

們有 $|I_n| \leq |I_m|$ 且 $|I_n| \neq |I_m|$，所以我們有 $|I_n| < |I_m|$。另外當 A 為 infinite set，依定義對任意 $n \in \mathbb{N}$ 皆有 $|I_n| \leq |A|$ 但 $|I_n| \neq |A|$，因此我們有 $|I_n| < A$。現若 B 為 finite set，我們知存在 $n \in \mathbb{N}$ 使得 $|B| = |I_n|$，所以得 $|B| < |A|$。因此這樣的 strict order 相當符合我們直觀對集合計數的想法。

5.5. Countable and Uncountable Sets

一個 finite set 的 cardinal number，我們知道就是其元素的個數；但對於 infinite set 其 cardinal number 並不是只有一種 “ 無窮大” 而已。事實上會有無窮多個 infinite set 它們的 cardinal number 都相異，也就是說利用 cardinal number，我們有可以把 “無窮大” 區分成好幾種。不過在本講義中，我們不會深入的討論這個問題。我們僅談論最簡單的區分方法，即分成 countable set 和 uncountable set 兩種。

前面說過，當我們在數有限集合 S 的個數時，其實是給一個一對一函數 $f : S \to \mathbb{N}$。所以我們用這個方式定義所謂的 “可數集合”。

Definition 5.5.1. 假如 S 是一個 set 滿足 $|S| \leq |\mathbb{N}|$，則稱 S 為 *countable* set。反之則稱為 *uncountable* set。

Question 5.15. 假設 S,T 為 *sets* 且 $|S| \leq |T|$。若 T 為 *countable*，是否可知 S 為 *countable*？

簡單來說：若存在一個 one-to-one function $f : S \to \mathbb{N}$，則 S 就是一個 countable set。由此定義我們知道若 S 是 finite set，那一定是 countable。不過有可能一個 infinite set 也是 countable。例如 $\mathbb{N}$ 本身，或是如 $2\mathbb{N}$（正的偶數所成的集合），都是 infinite set 且為 countable。不過 uncountable set 就一定會是 infinite set。所以當一個 infinite set 是 countable 時，我們會將之稱為 *countably infinite* 特別將這種 infinite set 和 uncountable set 區分出來。

首先我們要關注的是：在 finite set 和 $\mathbb{N}$ 之間是否還有其他的 cardinal number？答案是否定的。也就是說對於 infinite set 來說 $|\mathbb{N}|$ 就是最小的 cardinal number。我們說明以下此事實。假設 S 是一個 infinite set 且 $|S| \leq |\mathbb{N}|$。依定義存在一個 one-to-one function $f : S \to \mathbb{N}$。考慮 $T = f(S)$，我們可以將 f 視為是一個由 S 到 T 的 one-to-one 且 onto 的函數，所以 $|S| = |T|$。由於 T 是 $\mathbb{N}$ 的 infinite subset，所以我們若能證明此時 $|T| = |\mathbb{N}|$，那麼就有 $|S| = |T| = |\mathbb{N}|$。也就是說所有的 countably infinite set 其 cardinal number 皆等於 $|\mathbb{N}|$。

Lemma 5.5.2. 假設 $T \subseteq \mathbb{N}$ 且為 *infinite set*，則 $|T| = |\mathbb{N}|$。

Proof. 由於 $T \subseteq \mathbb{N}$，我們知 $|T| \leq |\mathbb{N}|$。現只要證明存在 $f : \mathbb{N} \to T$ 為 one-to-one function，則由此知 $|\mathbb{N}| \leq |T|$。故由 Theorem 5.4.6（Cantor–Schröder–Bernstein）得證 $|T| = |\mathbb{N}|$。

這裡我們要利用 $\mathbb{N}$ 在一般的 order “$\leq$” 之下是一個 well-ordered set（Well-ordering Principle）來證明。回顧一下：這表示每一個 $\mathbb{N}$ 的 nonempty subset 都有 least element

(或 minimum element)。若 S 為 nonempty subset of $\mathbb{N}$，我們用 $\min(S)$ 表示 S 的 least element。也就是說：若 $a=\min(S)$，表示 $a\in S$ 且對於任意 S 中的元素 s，若 $s\neq a$，則 $a<s$。

首先令 $f(1)=\min(T)$，我們有 $f(1)\in T$。如何定 $f(2)$ 呢？很自然的我們考慮 $T_2=T\setminus\{f(1)\}$，然後令 $f(2)=\min(T_2)$。注意此時 $T_2\neq\emptyset$，否則會有 $T\subseteq\{f(1)\}$ 此和 T 為 infinite set 之前題相矛盾，所以我們得到 $f(2)\in T$。如此一直下去，我們令 $T_{n+1}=T\setminus\{f(1),\ldots,f(n)\}$ 且令 $f(n+1)=\min(T_{n+1})$，這樣就定義出一個由 $\mathbb{N}$ 到 T 的 function $f:\mathbb{N}\to T$ 了。

接著要證明 $f:\mathbb{N}\to T$ 是 one-to-one。也就是說任取 $n_1,n_2\in\mathbb{N}$ 且 $n_1\neq n_2$，我們要說明 $f(n_1)\neq f(n_2)$。不失一般性，我們假設 $n_1<n_2$。此時由於 $T_{n_2}=T\setminus\{f(1),\ldots,f(n_1),\ldots,f(n_2-1)\}$，亦即 $f(n_1)\not\in T_{n_2}$，當然由 $f(n_2)=\min(T_{n_2})\in T_{n_2}$ 得知 $f(n_2)\neq f(n_1)$。得證 $f:\mathbb{N}\to T$ 是 one-to-one。 □

如前所述，由 Lemma 5.5.2 我們證得了以下定理。

Theorem 5.5.3. 假設 S 為一個 *set*。則 S 為 *countably infinite* 若且唯若 $|S|=|\mathbb{N}|$。

Question 5.16. 假設 S 為 *infinite set*。試證明 S 為 *uncountable* 若且唯若 $|S|\neq|\mathbb{N}|$。

依照 countable set 的定義，我們知道任意一個 countable set 的 subset 仍為 countable。這是因為若 S 為 countable，則依定義我們有 $|S|\leq|\mathbb{N}|$，也因此若 $S'\subseteq S$，則由 $|S'|\leq|S|$ 以及 $|S|\leq|\mathbb{N}|$，可得 $|S'|\leq|\mathbb{N}|$。不過要注意的是比 countable set 大的集合，仍有可能是 countable。我們有以下的情形。

Proposition 5.5.4. 有限多個 *countable set* 的聯集仍為 *countable set*。亦即若 $S_1,\ldots,S_n$ 為 *countable set*，則 $\bigcup_{i=1}^n S_i$ 仍為 *countable set*。

Proof. 我們用數學歸納法證明。首先證明若 S_1,S_2 為 countable，則 $S_1\cup S_2$ 為 countable。

依定義 S_1,S_2 是 countable，故存在 $f_1:S_1\to\mathbb{N}$ 以及 $f_2:S_2\to\mathbb{N}$ 皆為 one-to-one functions。現定義新的 function $f:S_1\cup S_2\to\mathbb{N}$，其定義為：

$$f(s)=\begin{cases}2f_1(s), & \text{if } s\in S_1;\\ 2f_2(s)+1, & \text{if } s\in S_2\setminus S_1.\end{cases}$$

很清楚，f 是 well-defined function 因為：$S_1\cup S_2=S_1\cup(S_2\setminus S_1)$ 以及 $S_1\cap(S_2\setminus S_1)=\emptyset$，因此對任意 $s\in S_1\cup S_2$，s 一定會在 S_1 和 $S_2\setminus S_1$ 其中一個，且不會同時皆在其中。而當 $s\in S_1$ 時 $f_1(s)$ 的取值是明確確定的（因 $f_1:S_1\to\mathbb{N}$ 是一個 function），所以此時 $f(s)$ 取值 $2f_1(s)$ 亦確定。同理當 $s\in S_2\setminus S_1$，因 $s\in S_2$ 故 $f_2(s)$ 的取值是明確確定的，所以此時 $f(s)$ 取值 $2f_2(s)+1$ 亦確定。我們剩下要證明 $f:S_1\cup S_2\to\mathbb{N}$ 是 one-to-one，也就是要證明：任取 $s,t\in S_1\cup S_2$ 其中 $s\neq t$，皆會有 $f(s)\neq f(t)$。我們分成以下兩種 cases：第一種情形就是 s,t 同屬於 S_1 或是同屬於 $S_2\setminus S_1$。此時我們分別有 $f(s)=2f_1(s)\neq 2f_1(t)=f(t)$（因 f_1 為 one-to-one）或 $f(s)=2f_2(s)+1\neq 2f_2(t)+1=f(t)$（因 f_2 為 one-to-one）。第二種情況是

$s\in S_1$ 但 $t\in S_2\setminus S_1$ 或是 $t\in S_1$ 但 $s\in S_2\setminus S_1$。此時由於 $f(s),f(t)$ 必為一奇一偶，故亦得 $f(s)\neq f(t)$。我們證得了 $f:S_1\cup S_2\to\mathbb{N}$ 為 one-to-one，故證得 $S_1\cup S_2$ 為 countable。

接著我們要用數學歸納法證明，對於任意 $n\in\mathbb{N}$ 且 $n\geq 2$，若 $S_1,\ldots,S_n$ 為 countable set，則 $\bigcup_{i=1}^n S_i$ 仍為 countable set。我們考慮 $n=k+1$ 的情形。利用歸納假設：$S_1,\ldots,S_k$ 為 countable set 所以 $\bigcup_{i=1}^k S_i$ 為 countable set。現又若 S_{k+1} 為 countable set，利用上面證過 $k=2$ 的情形，我們知 $(\bigcup_{i=1}^k S_i)\cup S_{k+1}$ 為 countable set。故由 $\bigcup_{i=1}^{k+1} S_i=(\bigcup_{i=1}^k S_i)\cup S_{k+1}$ 得證 $\bigcup_{i=1}^{k+1} S_i$ 為 countable set。 □

Proposition 5.5.4 有許多應用，最簡單的一種就是證得所有整數所成的集合為 countable。這是因為所有的整數可視為正整數、負整數以及 0 所成的集合的聯集。然而負整數所成的集合和正整數所成的集合 $\mathbb{N}$ 有一個一對一的對應關係（即 $-n\mapsto n$），所以是 countable；而 $\{0\}$ 是 finite set，亦為 countable，因此得證

Corollary 5.5.5. *$\mathbb{Z}$ is countable*。

其實有理數所成的集合 $\mathbb{Q}$ 也是 countable。我們首先看一個簡單的定理。

Lemma 5.5.6. *The Cartesian product $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ is countable*。

Proof. 回顧一下 $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ 的元素為任意的數對 (n_1,n_2)，其中 $n_1,n_2\in\mathbb{N}$，而且 $(n_1,n_2)=(n_1',n_2')$ 若且唯若 $n_1=n_1'$ 且 $n_2=n_2'$。現考慮函數 $f:\mathbb{N}\times\mathbb{N}\to\mathbb{N}$，其定義為

$$f(n_1,n_2)=2^{n_1}3^{n_2},\quad \forall n_1,n_2\in\mathbb{N}.$$

很容易知道 $f:\mathbb{N}\times\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ 為 function，我們僅要檢驗 f 為 one-to-one。現若 $(n_1,n_2)\neq(n_1',n_2')$，由整數的唯一分解性質我們知

$$f(n_1,n_2)=2^{n_1}3^{n_2}\neq 2^{n_1'}3^{n_2'}=f(n_1',n_2').$$

得證 $f:\mathbb{N}\times\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ 為 one-to-one，故 $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ 是 countable。 □

Lemma 5.5.6 證明了 $|\mathbb{N}\times\mathbb{N}|\leq|\mathbb{N}|$，不過我們很容易理解 $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ 為 infinite set，所以 $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ 為 countably infinite，亦即 $|\mathbb{N}\times\mathbb{N}|=|\mathbb{N}|$。Proposition 5.5.6，最常見的應用是可以推得有限多個 countable set 的 Cartesian product 仍為 countable。

Proposition 5.5.7. 若 $S_1,\ldots,S_n$ 為 *countable set*，則 $S_1\times S_2\times\cdots\times S_n$ 仍為 *countable set*。

Proof. 首先我們證明 $S_1\times S_2$ 為 countable。利用 S_1,S_2 為 countable 的假設，我們知道存在 $f_1:S\to\mathbb{N}$、$f_2:S_2\to\mathbb{N}$ 皆為 one-to-one function。現考慮 $f:S_1\times S_2\to\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ 其定義為

$$f(s_1,s_2)=(f_1(s_1),f_2(s_2)),\quad \forall s_1\in S_1,s_2\in S_2.$$

很容易知道 $f:S_1\times S_2\to\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ 為 function，我們僅要檢驗 f 為 one-to-one。對於任意 $(s_1,s_2),(s_1',s_2')\in S_1\times S_2$ 且 $(s_1,s_2)\neq(s_1',s_2')$，我們知 $s_1\neq s_1'$ 或 $s_2\neq s_2'$。現若 $s_1\neq s_1'$，由 $f_1:S_1\to\mathbb{N}$ 為 one-to-one 知 $f_1(s_1)\neq f_1(s_1')$，故此時

$$f(s_1,s_2)=(f_1(s_1),f_2(s_2))\neq(f_1(s_1'),f_2(s_2'))=f(s_1',s_2').$$

同理當 $s_2 \neq s_2'$ 時，亦可得 $f(s_1,s_2) \neq f(s_1',s_2')$。得證 $f: S_1 \times S_2 \to \mathbb{N}\times\mathbb{N}$ 為 one-to-one。亦即 $|S_1\times S_2| \leq |\mathbb{N}\times\mathbb{N}| = |\mathbb{N}|$，因此證明了 $S_1 \times S_2$ 為 countable。

至於當 $S_1,\ldots,S_n$ 為 countable set，則利用 $S_1\times S_2\times\cdots\times S_n = (S_1\times S_2\times\cdots\times S_{n-1})\times S_n$ 以及數學歸納法可證明 $S_1\times S_2\times\cdots\times S_n$ 為 countable set，我們就不多做說明了。 □

我們可以利用 Proposition 5.5.7 證明有理數所成的集合 $\mathbb{Q}$ 為 countable。這是因為有理數除了 0 以外都可以唯一寫成 a/b 其中 $a\in\mathbb{Z}$, $b\in\mathbb{N}$ 且 $\gcd(a,b)=1$ 的形式 (我們稱此為最簡分數)。所以考慮 $f:\mathbb{Q}\to\mathbb{Z}\times\mathbb{N}$，定義為 $f(0)=(0,1)$；而當 $q\in\mathbb{Q}$, $q\neq 0$ 且 a/b 為 q 的最簡分數時，則定義 $f(q)=(a,b)$。由非零有理數最簡分數表法的唯一性，我們知 $f:\mathbb{Q}\to\mathbb{Z}\times\mathbb{N}$ 為 function。而若 $q\neq q'$，當 q,q' 其中有一個為 0 時，我們知道另一個不為 0，故其最簡分數不可能寫成 $0/1$，因此此時 $f(q)\neq f(q')$。而若 q,q' 皆不為 0 時，設其最簡分數分別為 $q=a/b, q'=a'/b'$。由於 $a/b\neq a'/b'$，我們知 $f(q)=(a,b)\neq(a',b')=f(q')$。因此知 $f:\mathbb{Q}\to\mathbb{Z}\times\mathbb{N}$ 為 one-to-one，得證 $|\mathbb{Q}|\leq|\mathbb{Z}\times\mathbb{N}|$。由 $\mathbb{Z}$ 為 countable 以及 Proposition 5.5.7 知 $\mathbb{Z}\times\mathbb{N}$ 為 countable，又 $\mathbb{Z}\times\mathbb{N}$ 為 infinite set 故 $|\mathbb{Z}\times\mathbb{N}|=|\mathbb{N}|$。因此 $|\mathbb{Q}|\leq|\mathbb{N}|$，得證以下的定理。

Corollary 5.5.8. $\mathbb{Q}$ *is countable*。

利用 Lemma 5.5.6，我們也可將 Proposition 5.5.4 推廣到更一般情況。

Proposition 5.5.9. 若對任意 $i\in\mathbb{N}$, S_i 皆為 *countable set*，則 $\bigcup_{i=1}^{\infty}S_i$ 仍為 *countable set*。

Proof. 依假設，對任意 $i\in\mathbb{N}$ 皆存在 $f_i:S_i\to\mathbb{N}$ 為 one-to-one function。現考慮 $f:\bigcup_{i=1}^{\infty}S_i\to\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ 定義為：對任意 $s\in\bigcup_{i=1}^{\infty}S_i$，若 i 為最小的正整數滿足 $s\in S_i$，則令 $f(s)=(i,f_i(s))$。很容易驗證 $f:\bigcup_{i=1}^{\infty}S_i\to\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ 為 function。現對任意 $s,s'\in\bigcup_{i=1}^{\infty}S_i$，假設 i,i' 分別為最小的正整數滿足 $s\in S_i, s'\in S_{i'}$。若 $i\neq i'$，自然得 $f(s)=(i,f_i(s))\neq(i',f_{i'}(s'))=f(s')$。而若 $i=i'$，則因 $s,s'\in S_i$ 且 $f_i:S_i\to\mathbb{N}$ 為 one-to-one，我們有 $f_i(s)\neq f_i(s')$，故 $f(s)=(i,f_i(s))\neq(i,f_i(s'))=f(s')$。得證 $f:\bigcup_{i=1}^{\infty}S_i\to\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ 為 one-to-one，即 $|\bigcup_{i=1}^{\infty}S_i|\leq|\mathbb{N}\times\mathbb{N}|=|\mathbb{N}|$。證得 $\bigcup_{i=1}^{\infty}S_i$ 為 countable set。 □

目前我們處理的都是 countable sets，是否存在著 uncountable set 呢？答案是肯定的。例如 Proposition 5.5.7 中 Cartesian product 並不能如聯集一樣推廣到無窮多個集合的情形。也就是說有可能 $S_1,\ldots,S_n,\ldots$ 為 countable 但是 $S_1\times\cdots\times S_n\times\cdots$ 為 uncountable。還有 $\mathbb{N}$ 的 power set $\mathscr{P}(\mathbb{N})$ 也是 uncountable。回顧一下：一個集合 A 的 power set $\mathscr{P}(A)$，即為 A 的所有 subsets 所成的集合。首先我們有以下的結果。

Theorem 5.5.10. 假設 A 為一個 *set*，考慮 $\mathscr{P}(A)$ 為 A 的 *power set*，則 $|A|<|\mathscr{P}(A)|$。

Proof. 考慮函數 $\imath:A\to\mathscr{P}(A)$ 定義為 $\imath(a)=\{a\}$, $\forall a\in A$。我們很容易看出 $\imath:A\to\mathscr{P}(A)$ 為 one-to-one function，因此得 $|A|\leq|\mathscr{P}(A)|$。所以要證明 $|A|<|\mathscr{P}(A)|$，就是要證明 $|A|\neq|\mathscr{P}(A)|$。

我們要證明對於任何 function $f: A \to \mathscr{P}(A)$ 都不可能是 onto。若證得這個結果就表示不可能存在 function $f: A \to \mathscr{P}(A)$ 是 one-to-one 且 onto，因此得證 $|A| \neq |\mathscr{P}(A)|$。現對於任何 function $f: A \to \mathscr{P}(A)$，考慮 A 的一個子集合 $S = \{s \in A \mid s \notin f(s)\}$。注意 S 是有可能為空集合，不過不管怎樣我們都有 $S \in \mathscr{P}(A)$。我們要說明不可能存在一個元素 $a \in A$ 使得 $f(a) = S$。也就是說 S 不會在函數 $f: A \to \mathscr{P}(A)$ 的 image 中，因此得到 $f: A \to \mathscr{P}(A)$ 不可能是 onto。利用反證法：假設 $a \in A$ 使得 $f(a) = S$。我們檢查是否 $a \in S$？假設 $a \in S$，表示 $a \in f(a)$（因 $f(a) = S$）；但依 S 的定義若 $a \in S$ 表示 $a \notin f(a)$，因此得到矛盾，故知 $a \notin S$。不過由 $a \notin S$，得 $a \notin f(a)$，又依 S 的定義得 $a \in S$ 之矛盾。也就是說若存在 $a \in A$ 使得 $f(a) = S$，會造成 $a \in S$ 和 $a \notin S$ 都不可能發生的矛盾（注意即使 S 為空集合，這依然不成立）。所以證得 $S \in \mathscr{P}(A)$ 不在 $f: A \to \mathscr{P}(A)$ 的 image 中，得證 $f: A \to \mathscr{P}(A)$ 不是 onto。 □

Question 5.17. 令 $A = \{1,2,3\}$，考慮 $f: A \to \mathscr{P}(A)$ 定義為

$$f(1) = \{1,2\}, \quad f(2) = \{1,3\}, \quad f(3) = \{2\}.$$

令 $S = \{s \in A \mid s \notin f(s)\}$。試寫下 S 為何？並檢驗 S 不在 $f: A \to \mathscr{P}(A)$ 的 *image* 中。

Corollary 5.5.11. $\mathbb{N}$ 的 *power set* $\mathscr{P}(\mathbb{N})$ 是 *uncountable*。

Proof. 令反證法，設 $\mathscr{P}(\mathbb{N})$ 為 countable，即 $|\mathscr{P}(\mathbb{N})| \leq |\mathbb{N}|$。但已知 $|\mathbb{N}| \leq |\mathscr{P}(\mathbb{N})|$，故由 Theorem **??** 得到 $|\mathbb{N}| = |\mathscr{P}(\mathbb{N})|$ 此與 Theorem 5.5.10 $|\mathbb{N}| < |\mathscr{P}(\mathbb{N})|$ 相矛盾。得證 $\mathscr{P}(\mathbb{N})$ 為 uncountable。 □

我們知道有限多個 countable set 的 Cartesian product 仍為 countable (Proposition 5.5.7), 不過這對於無窮多個 countable set 的 Cartesian product 並不成立. 事實上我們有以下之結果.

Proposition 5.5.12. 對於任意 $n \in \mathbb{N}$, 令 $S_n = \{0,1\}$. 則無窮的 *Cartesian product*

$$S_1 \times S_2 \times \cdots \times S_n \times \cdots$$

為 *uncountable.*

Proof. 為了符號方便起見，令 $\mathscr{S} = S_1 \times S_2 \times \cdots \times S_n \times \cdots$。我們要證明 $|\mathscr{S}| = |\mathscr{P}(\mathbb{N})|$（亦即存在一對一且映成的函數 $f: \mathscr{S} \to \mathscr{P}(\mathbb{N})$），因此由 Corollary 5.5.11 得證 $\mathscr{S}$ 為 uncountable。

對於任意 $s = (s_1, s_2, \ldots, s_n, \ldots) \in \mathscr{S}$，我們令 $f(s) = \{n \in \mathbb{N} \mid s_n = 1\} \in \mathscr{P}(\mathbb{N})$。依此定義我們得 $f: \mathscr{S} \to \mathscr{P}(\mathbb{N})$ 是一個 function。我們要證明 f 是一對一且映成的函數。首先若 $s = (s_1, \ldots, s_n, \ldots) \neq s' = (s'_1, \ldots, s'_n, \ldots)$，表示存在 $n \in \mathbb{N}$ 使得 $s_n \neq s'_n$。也就是說如果 $s_n = 1$，則 $s'_n = 0$。此時依定義，我們有 $n \in f(s)$ 但 $n \notin f(s')$，因此得 $f(s) \neq f(s')$。同理若 $s_n = 0$，亦可得 $f(s) \neq f(s')$，得證 f 為一對一。至於映成部分，給定 $S \in \mathscr{P}(\mathbb{N})$（亦即 $S \subseteq \mathbb{N}$），對於任意 $n \in \mathbb{N}$, 若 $n \in S$, 則令 $s_n = 1$; 反之, 則令 $s_n = 0$。此時考慮 $s = (s_1, \ldots, s_n, \ldots) \in \mathscr{S}$，可得 $f(s) = S$，因此得證 f 為映成。 □

接下來我們用 Proposition 5.5.12 來證明實數所成的集合 $\mathbb{R}$ 是 uncountable。

Proposition 5.5.13. $\mathbb{R}$ *is uncountable.*

Proof. 考慮 S 為所有整數部分為 0, 而小數點後各位數是 0 或 1 所組成的實數所成的集合。例如 $0.1011010\overline{0}$ 和 $0.101101\overline{1}$ 都是 S 中的元素。要注意我們將 S 中的元素都寫成無限小數(若是有限小數，我們將之寫成最後皆為 0 的無限循環小數。例如：$0.101101 = 0.1011010\overline{0}$)。也要注意 S 中不只有無限循環小數，也有無限不循環小數(其實無限不循環小數佔了大多數)。由 Proposition 5.5.12 我們知道 S 是 uncountable，所以利用 $S \subseteq \mathbb{R}$，可得 $|S| \leq |\mathbb{R}|$。因此 $|\mathbb{R}| \leq |\mathbb{N}|$ 不可能成立(否則會造成 $|S| \leq |\mathbb{N}|$ 的矛盾)。得證 $\mathbb{R}$ 為 uncountable。 □

Theorem 5.5.10 的證明方法是數學家 Cantor 所提出的。他利用類似的想法也證出實數所成的集合 $\mathbb{R}$ 為 uncountable，這個證明方法就留做習題。

最後我們要強調：一般來說要探討一個 infinite set S 是 countable 或是 uncountable 並不容易。首先我們必須先用一些資訊來判斷它為 countable 或是 uncountable。若判斷是 countable，就必須證明：找得到一個 $S \to \mathbb{N}$ 的 one-to-one function；而若判斷為 uncountable，要證明其為 uncountable，一般都是用反證法。也就是說假設其為 countable，然後得到矛盾。其中最常用的方法就是如前面的證明，說明所有 $S \to \mathbb{N}$ 的 function 都不會是 onto。

Exercise 5.7. 假設 $f : X \to Y$ 是一個 bijection 且 $g : Y \to Z$ 是一個 function。證明：

(1) $g \circ f$ is surjective if and only if g is surjective.

(2) $g \circ f$ is injective if and only if g is injective.

Exercise 5.8. 假設 $h : X \to Y$ 為 injective。

(1) For $A \subseteq X$, prove $|A| = |h(A)|$.

(2) For $B \subseteq Y$, prove $\left|h^{-1}(B)\right| \leq |B|$.

Exercise 5.9. 假設 A, B, C, D 皆為 nonempty sets 且 $|A| = |B|$ 以及 $|C| = |D|$。證明

$$|A \times C| = |B \times D|.$$

Exercise 5.10. 令 X 為 nonempty set 且 $Y, Z \subseteq X$.

(1) 假設 Y 為 uncountable 且 Z 為 countable。證明 $Y \setminus Z$ 為 uncountable。

(2) 假設 $Y \times Z$ 為 uncountable。證明 Y 或 Z 中有一個為 uncountable。

Exercise 5.11. 給定 $n \in \mathbb{N}$, 令 $\mathsf{P}_n(\mathbb{Z})$ 為所有次數小於 n 的整係數多項式所成的集合；$\mathsf{P}(\mathbb{Z})$ 為所有的整係數多項式所成的集合；$\mathsf{P}_\infty(\mathbb{Z})$ 為所有的整係數 power series (冪級數)所成的集合。

(1) 試利用集合表示法寫下 $\mathsf{P}_n(\mathbb{Z})$、$\mathsf{P}(\mathbb{Z})$、$\mathsf{P}_\infty(\mathbb{Z})$。

(2) 試說明 $\mathsf{P}_n(\mathbb{Z})$、$\mathsf{P}(\mathbb{Z})$、$\mathsf{P}_\infty(\mathbb{Z})$ 中，哪些是 countable？哪些是 uncountable？

Exercise 5.12. 令 S 為所有整數部分為 0，而小數點後各位數是 0 或 1 所組成的實數所成的集合。假設 $f:\mathbb{N}\to S$ 是一個函數。考慮 S 中的元素 $s=0.a_1a_2a_3\ldots a_i\ldots$，其中對任意 $i\in\mathbb{N}$，我們令 s 的小數點後第 i 位的值 a_i 為

$$a_i=\begin{cases}1, & \text{若 } f(i) \text{ 小數點後第 } i \text{ 位為 } 0;\\ 0, & \text{若 } f(i) \text{ 小數點後第 } i \text{ 位為 } 1.\end{cases}$$

試證明 s 不在 $f:\mathbb{N}\to S$ 的 image 中，並依此說明 S 是 uncountable。

附錄：Cantor–Schröder–Bernstein Theorem

在此附錄，我們提供 Cantor–Schröder–Bernstein Theorem 的證明以及例子。

Theorem (Cantor–Schröder–Bernstein)**.** 假設 A,B 為 *sets* 滿足 $|A|\leq|B|$ 且 $|B|\leq|A|$, 則 $|A|=|B|$.

Proof. 由假設 $|A|\leq|B|$ 知存在 $f:A\to B$ 為 one-to-one function. 又由 $|B|\leq|A|$, 知存在 $g:B\to A$ 為 one-to-one function. 我們要利用 f,g 得到 A,B 的 partition, 再利用 Lemma 5.4.3 得到 $|A|=|B|$.

首先對於任意 $a\in A$, 我們建構出一個由 $A\cup B$ 的元素所組成的數列. 其建構方式如下: 首先令第一項 $x_1=a$, 考慮 inverse image $g^{-1}(\{a\})$. 由於 g 是 one-to-one, 我們知 $g^{-1}(\{a\})$ 最多僅有一個元素. 若 $g^{-1}(\{a\})=\emptyset$, 則這個數列僅有 x_1 這個元素. 而若 $g^{-1}(\{a\})=\{b\}$, 則令 $x_2=b$. 由於 $b\in B$, 接著考慮 $f^{-1}(\{b\})$. 同樣的, 因為 f 為 one-to-one, 我們知 $f^{-1}(\{b\})$ 最多僅有一個元素. 若 $f^{-1}(\{b\})=\emptyset$, 則這個數列僅有 x_1,x_2 兩個元素. 而若 $f^{-1}(\{b\})=\{a'\}$, 則令 $x_3=a'$. 又由於 $a'\in A$, 我們又可考慮 $g^{-1}(\{a'\})$, 然後依前面規則這樣一直下去. 令 $\langle a\rangle$ 表示利用這個規則由 a 所建構出的數列 (若對如何建構這樣的數列仍不清楚, 請參考底下 Example 5.5.14). 這樣由所有 $a\in A$ 而得的數列 $\langle a\rangle=x_1,x_2,\ldots$, 我們可以分成三類. 第一類是有奇數項的有限數列. 例如若 $a\in A$ 且 $g^{-1}(\{a\})=\emptyset$, 此時 $\langle a\rangle$ 僅有一項, 故屬於這一類的數列. 第二類是有偶數項的有限數列. 例如 $a\in A$ 且 $g^{-1}(\{a\})=\{b\}$ 但 $f^{-1}(\{b\})=\emptyset$, 此時 $\langle a\rangle$ 有 a,b 兩項, 故屬於這一類的數列. 第三類是有無窮多項的數列, 也就是說 $a\in A$ 所建構的數列每一項的 inverse image 皆不是空集合. 現令

$$A_o=\{a\in A:\langle a\rangle\text{有奇數項}\},\quad A_e=\{a\in A:\langle a\rangle\text{有偶數項}\},\quad A_\infty=\{a\in A:\langle a\rangle\text{有無窮多項}\}.$$

由於每一個 $a\in A$, 都可依這個規則建構出一組唯一數列 $\langle a\rangle$, 因此 a 一定會是 A_o,A_e,A_∞ 其中之一的元素, 且任兩個不會有交集. 所以 A_o,A_e,A_∞ 是 A 的一個 partition.

要注意這樣做出的數列, 其奇數項一定是 A 中的元素, 而偶數項一定是 B 中的元素. 也就是說若 $\langle a\rangle=x_1,x_2,\ldots$, 則當 i 為奇數時 $x_i\in A$. 又此時因 $x_i\in f^{-1}(\{x_{i-1}\})$, 故有 $f(x_i)=x_{i-1}$. 而當 i 為偶數時 $x_i\in B$. 又此時因 $x_i\in g^{-1}(\{x_{i-1}\})$, 故有 $g(x_i)=x_{i-1}$.

同樣的對任意 $b\in B$, 我們也用相同規則做出一個由 b 起始的數列, 亦即 $y_1=b$, 然後考慮 $f^{-1}(\{b\})$ 來決定下一項, 這樣一直下去. 令 $\langle b\rangle$ 表示 b 利用這個規則所建構出的數列. 同樣的, 我們得到 B 的一個 partition B_o,B_e,B_∞, 其中

$$B_o=\{b\in B:\langle b\rangle\text{有奇數項}\},\quad B_e=\{b\in B:\langle b\rangle\text{有偶數項}\},\quad B_\infty=\{b\in B:\langle b\rangle\text{有無窮多項}\}.$$

現考慮 restriction map $f|_{A_o}: A_o \to B$, 也就是對任意 $a \in A_o$, $f|_{A_o}(a) = f(a)$. 由於 f 為 one-to-one, 很自然的 $f|_{A_o}$ 仍為 one-to-one. 我們要說明 $f|_{A_o}$ 的 range $f|_{A_o}(A_o)$ 為 B_e. 對任意 $a \in A_o$, 我們有 $f|_{A_o}(a) = f(a) \in B$. 此時考慮 $f(a)$ 所建構的 sequence, 首項為 $y_1 = f(a)$, 而因 $f^{-1}(\{f(a)\}) = \{a\}$ (因 $f(a) \in \{f(a)\}$), 依 $\langle f(a) \rangle$ 的建構方式我們有 $y_2 = a$. 換言之, 數列 $\langle f(a) \rangle$ 前兩項為 $y_1 = f(a), y_2 = a$, 又由於下一項 (即第三項) y_3 完全由 $g^{-1}(\{a\})$ 所決定. 這和考慮 a 所建構的數列 $\langle a \rangle$ 第二項 x_2 是一樣的. 換言之, 數列 $\langle f(a) \rangle$ 只是將數列 $\langle a \rangle$ 的第一項之前再多加一項 $f(a)$ 而已. 現 $a \in A_o$, 表示 $\langle a \rangle$ 有奇數項, 所以 $\langle f(a) \rangle$ 會有偶數項, 故由 $f(a) \in B$ 知 $f(a) \in B_e$. 得證 $f|_{A_o}(A_o) \subseteq B_e$. 反之, 若 $b \in B_e$, 表示 b 所建構的數列 $\langle b \rangle$ 有偶數項. 因此 $\langle b \rangle$ 的第二項一定存在 (否則僅有一項, 造成矛盾). 所以由 $\langle b \rangle$ 的建構方法知 $f^{-1}(\{b\})$ 不是空集合, 也就是說存在 $a \in A$ 使得 $f(a) = b$. 事實上 a 就是 $\langle b \rangle$ 的第二項, 因此如前所述, $\langle a \rangle$ 是將 $\langle b \rangle = \langle f(a) \rangle$ 的第一項除去所得, 也就是說 $\langle a \rangle$ 有奇數項, 因此得 $a \in A_o$. 我們證得了對任意 $b \in B_e$, 皆存在 $a \in A_o$ 使得 $f(a) = f|_{A_o}(a) = b$. 因此知 $B_e \subseteq f|_{A_o}(A_o)$, 也得證了 $f|_{A_o}$ 的 range $f|_{A_o}(A_o)$ 就是 B_e. 換言之, $f|_{A_o}$ 可以視為是一個從 A_o 到 B_e 的 one-to-one and onto function. 我們證得了 $|A_o| = |B_e|$.

同理, 考慮 $g: B \to A$ 在 B_o 的 restriction $g|_{B_o}: B_o \to A$, 我們可以得到 $|B_o| = |A_e|$ (只是將上面的證明 f, g 互換即可). 最後我們考慮 g 在 B_∞ 上的 restriction $g|_{B_\infty}$ (也可考慮 f 在 A_∞ 上的 restriction). 此時 $g|_{B_\infty}$ 依然為 one-to-one. 而對於任意 $b \in B_\infty$, 我們考慮 $g(b)$ 所產生的數列 $\langle g(b) \rangle$. 由於 $g(b) \in A$, 而 $g^{-1}(\{g(b)\}) = \{b\}$, 故 $\langle g(b) \rangle$ 的第一項為 $g(b)$, 第二項為 b, 之後依序就是 $\langle b \rangle$ 的其他各項. 因此由 $b \in B_\infty$ 即 $\langle b \rangle$ 有無窮多項得 $\langle g(b) \rangle$ 亦有無窮多項. 得證 $g(b) \in A_\infty$, 亦即證得 $g|_{B_\infty}$ 的 range $g|_{B_\infty}(B_\infty)$ 包含於 A_∞. 反之, 若 $a \in A_\infty$, 表示 a 所建構的數列 $\langle a \rangle$ 有無窮多項. 因此 $\langle a \rangle$ 的第二項一定存在. 所以由 $\langle a \rangle$ 的建構方法知 $g^{-1}(\{a\})$ 不是空集合, 也就是說存在 $b \in B$ 使得 $g(b) = a$. 事實上 b 就是 $\langle a \rangle$ 的第二項, 因此如前所述, $\langle b \rangle$ 是將 $\langle a \rangle$ 的第一項除去所得, 也就是說 $\langle b \rangle$ 仍有無窮多項, 因此得 $b \in B_\infty$. 我們證得了對任意 $a \in A_\infty$, 皆存在 $b \in B_\infty$ 使得 $g(b) = g|_{B_\infty}(b) = a$. 因此知 $A_\infty \subseteq g|_{B_\infty}(B_\infty)$, 也得證了 $g|_{B_\infty}$ 的 range $g|_{B_\infty}(B_\infty)$ 就是 A_∞. 換言之, $g|_{B_\infty}$ 可以視為是一個從 B_∞ 到 A_∞ 的 one-to-one and onto function. 我們證得了 $|B_\infty| = |A_\infty|$.

最後因 A_o, A_e, A_∞ 為 A 的 partition 以及 B_o, B_e, B_∞ 為 B 的 partition, 又因 $|A_o| = |B_e|$, $|A_e| = |B_o|$ 以及 $|A_\infty| = |B_\infty|$, 利用 Lemma 5.4.3 得證 $|A| = |B|$. □

Question 5.18. *Theorem 5.4.6 的證明中, $|A_e| = |B_o|$ 的證明為何是考慮 g 在 B_o 的 restriction 而不是考慮 f 在 A_e 的 restriction? 若考慮 f 在 A_e 的 restriction $f|_{A_e}: A_e \to B$, 其 range 為何? 又 $|A_\infty| = |B_\infty|$ 的證明可以考慮 f 在 A_∞ 上的 restriction $f|_{A_\infty}: A_\infty \to B$ 嗎?*

Example 5.5.14. 考慮 $A = \{1, 2, \dots\}$ 為正整數所成的集合, $B = \{-1, -2, \dots\}$ 為負整數所成的集合. 考慮 $f: A \to B$ 定義為 $f(a) = -1 - a$, $\forall a \in A$ 以及 $g: B \to A$ 定義為 $g(b) = 1 - b$, $\forall b \in B$. 我們利用這個例子說明 Theorem 5.4.6 中建構數列的方法. 首先我們用以下圖示來表示這兩個函數的映射關係:

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[dr] & 2 \arrow[dr] & 3 \arrow[dr] & 4 & \cdots \\
-1 \arrow[ur] & -2 \arrow[ur] & -3 \arrow[ur] & -4 & \cdots
\end{tikzcd}$$

注意上圖中由上往下的映射是 f, 而由下往上的是 g.

現考慮 $3\in A$, 由 $g^{-1}(\{3\})=\{-2\}$, $f^{-1}(\{-2\})=\{1\}$ 以及 $g^{-1}(\{1\})=\emptyset$, 我們知道利用 3 所建構的數列 $\langle 3\rangle$ 為 $3,-2,1$. 因為此數列有 3 項, 所以知 $3\in A_o$. 同理, 由上圖很快看出利用 4 所建構的數列 $\langle 4\rangle$ 為 $4,-3,2,-1$, 得 $4\in A_e$. 很快的我們可以歸納出, 當 $a\in A$ 為奇數時 $a\in A_o$, 而當 $a\in A$ 為偶數時 $a\in A_e$. 也因此知 $A_\infty=\emptyset$. 事實上此時 A_o,A_e 就是 A 的一個 partition (恰好就是奇數與偶數的 partition).

而對於 $-3\in B$, 由 $f^{-1}(\{-3\})=\{2\}$, $g^{-1}(\{2\})=\{-1\}$ 以及 $f^{-1}(\{-1\})=\emptyset$, 我們知道利用 -3 所建構的數列 $\langle -3\rangle$ 為 $-3,2,-1$. 因為此數列有 3 項, 所以知 $-3\in B_o$. 同理, 由上圖很快看出利用 -4 所建構的數列 $\langle -4\rangle$ 為 $-4,3,-2,1$, 得 $-4\in B_e$. 很快的我們可以歸納出, 當 $b\in B$ 為奇數時 $b\in B_o$, 而當 $b\in B$ 為偶數時 $b\in B_e$. 也因此知 $B_\infty=\emptyset$. 事實上此時 B_o,B_e 就是 B 的一個 partition.

接著我們看 f 確實一對一的將 A_o 映成至 B_e (英文稱之為 one-to-one correspondence). 首先當 $a\in A_o$ 表示 a 為正奇數, 利用 $f(a)=-(1+a)$ 知 $f(a)$ 為負偶數, 即 $f(a)\in B_e$. 因此 f 確實一對一將 A_o 映射至 B_e. 而對於 $b\in B_e$, 我們知 b 為負偶數. 今考慮 $a=-b-1$, 我們有 $a>0$ (因 $b\leq -2$) 且 a 為奇數, 即 $a\in A_o$. 將 $a=-b-1\in A_o$ 代入 f 得 $f(a)=-(1+a)=b$. 故知 f 確實一對一將 A_o 映成至 B_e. 注意 f 無法將 A_e 映成至 B_o. 主要原因是 B_o 中有可能有元素其 inverse image 是空集合. 例如這裡我們有 $-1\in B_o$ 且 $f^{-1}(\{-1\})=\emptyset$. 所以這裡我們是用 g 來得到 B_o 至 A_e 之間的 one-to-one correspondence. 事實上對任意 $b\in B_o$, 我們有 b 為負奇數, 因此 $g(b)=1-b$ 為正偶數, 即 $g(b)\in A_e$. 反之, 對任意 $a\in A_e$, 我們有 $b=1-a<0$ (因 $a\geq 2$) 且為奇數. 此時將 $b=1-a\in B_o$ 代入 g, 得 $g(b)=1-b=1-(1-a)=a$, 故得證 g 確實一對一將 B_o 映成至 A_e.

Question 5.19. 試利用 *Example 5.5.14* 中的 f 和 g 寫下一個 A 到 B 的 *bijective function* $h:A\to B$ 滿足 $h|_{A_o}=f|_{A_o}$.