最後我們介紹如何利用 elementary row operation 求 $n\times n$ matrix 的 determinant. 首先我們先用 elementary row operations 將矩陣變為 echelon form. 而且在化為 echelon form 的過程中只用 (1) 兩 row 交換 (此時 determinant 變號) 以及 (3) 將某個 row 乘上非零實數 r 加到另一個 row (此時 determinant 不會改變), 這兩種 row operations. 若發現 pivot 的個數小於 n, 則我們得矩陣的 determinant 為 0. 而若 pivot 的個數為 n, 則我們利用做了幾次兩 row 交換的 row operation, 就可由 echelon form 的 determinant 得到原矩陣的 determinant (即做了奇數次變號, 偶數次不變號). 然而如何求一個 echelon form 的 determinant 呢? 由於一個 $n\times n$ matrix 的 echelon form 一定是一個 *upper triangular matrix* (上三角矩陣), 也就是說矩陣 diagonal (對角線) 的位置 (即 (i,i)-th entry) 以下的位置皆為 0 (即 $a_{ij}=0$, for $i>j$), 此時下一個定理告訴我們其 determinant 就是 diagonal entries 的乘積.

Proposition 5.2.9. 假設 $A=[a_{ij}]$ 為 $n\times n$ *upper triangular matrix* 則 $\det(A)=a_{11}\cdots a_{nn}$, 即 $\det(A)$ 為 A 的 *diagonal entries* 的乘積.

Proof. 假設 A 有一個 diagonal entry a_{ii} 為 0, 因為 A 為 upper triangular, 我們知 A 化為 echelon form 後其 pivot 的個數必小於 n. 因此 A 不是 invertible, 得知 $\det(A)=0$. 而此時 A 的 diagonal entries 的乘積 $a_{11}\cdots a_{ii}\cdots a_{nn}$ 亦為 0, 故得證 $\det(A)=0=a_{11}\cdots a_{nn}$.

現若 A 的 diagonal entry 皆不為 0, 此時將 A 的每個 row 做以下的 elementary row operation: 就是對每一個 $i\in\{1,\ldots,n\}$, 將 A 的 i-st row 乘上 $1/a_{ii}$. 令所得的矩陣為 A', 此時我們有 $\det(A)=a_{11}\cdots a_{nn}\det(A')$. 因為 A' 的 diagonal entry 皆為 1, 利用 echelon form 化為 reduced echelon form 的方法 (參見 Section 1.3), 我們從最後一個 row (即 n-th row) 開始由下往上的利用該 row 乘上非零實數加到另一個 row 的方法將 A' 化為 I_n. 因為這裡所用的 elementary row operations 都不會影響 determinant, 所以我們有 $\det(A')=\det(I_n)=1$. 因此得證 $\det(A)=a_{11}\cdots a_{nn}\det(A')=a_{11}\cdots a_{nn}$ □

Question 5.1. 假設 $A=[a_{ij}]$ 為 $n\times n$ *lower triangular matrix,* 即 A 的 *diagonal* 以上的位置皆為 0 *(*即 $a_{ij}=0$*, for* $i<j$*).* 試證明 $\det(A)=a_{11}\cdots a_{nn}$, 即 $\det(A)$ 為 A 的 *diagonal entries* 的乘積.

Example 5.2.10. 我們利用 elementary row operation 求 $\begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 & 1\\ 1 & 2 & 0 & 2\\ 1 & 4 & -2 & 6\\ 2 & 6 & -1 & 8\end{bmatrix}$ 的 determinant. 首先將 1-st, 2-nd row 交換得 $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 2\\ 0 & 2 & -1 & 1\\ 1 & 4 & -2 & 6\\ 2 & 6 & -1 & 8\end{bmatrix}$ (注意此時 determinant 會變號). 接著將 1-st row 分別乘上 $-1,-2$ 加到 3-rd, 4-th row 得 $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 2\\ 0 & 2 & -1 & 1\\ 0 & 2 & -2 & 4\\ 0 & 2 & -1 & 4\end{bmatrix}$ (注意此時 determinant 不會改變). 最後將 2-nd row 分別乘上 $-1,-1$ 加到 3-rd, 4-th row 得 echelon form

$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ (注意此時 determinant 不會改變). 利用 Proposition 5.2.9 我們知最後所得的 echelon form 其 determinant 為 -6, 又整個化為 echelon form 的過程中僅用了一次兩 row 交換的 row operation, 故 determinant 僅變號一次, 得知

$$\det\begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & 4 & -2 & 6 \\ 2 & 6 & -1 & 8 \end{bmatrix} = -\det\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} = 6.$$

5.3. Determinant of 3×3 Matrix

我們利用上一節有關 determinant 的性質, 寫出 3×3 matrix 的 determinant 可能的形式, 從而證明 3×3 matrix 的 determinant 確實存在. 同時我們利用此 determinant 定義出 $\mathbb{R}^3$ 中三個向量所張成的平行六面體的 *signed volume*.

在 Theorem 5.2.6 (3) 中, 我們知道 $\det(A^t) = \det(A)$. 因此有關 determinant 和 row 有關的性質, 對於 column 也有相對應的性質. 例如我們對 determinant 要求的 (3)(4) 兩個所謂 multi-linear 的性質, 是和 row 有關的, 因此對於 column 也會有 multi-linear 的性質. 我們大致圖示如下 (所有向量寫成 column vector):

$$\det\begin{bmatrix} | & & | & & | \\ \mathbf{v}_1 & \cdots & \mathbf{v}_i + r\mathbf{v}_i' & \cdots & \mathbf{v}_n \\ | & & | & & | \end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix} | & & | & & | \\ \mathbf{v}_1 & \cdots & \mathbf{v}_i & \cdots & \mathbf{v}_n \\ | & & | & & | \end{bmatrix} + r\det\begin{bmatrix} | & & | & & | \\ \mathbf{v}_1 & \cdots & \mathbf{v}_i' & \cdots & \mathbf{v}_n \\ | & & | & & | \end{bmatrix}.$$

考慮 3×3 matrix $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$. 利用 determinant 對於 column 的 multi-linear 的性質, 由於 A 的 1-st column 可以寫成 $a_{11}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + a_{21}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + a_{31}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, 我們有

$$\det\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} =$$
$$a_{11}\det\begin{bmatrix} 1 & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} + a_{21}\det\begin{bmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ 1 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} + a_{31}\det\begin{bmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 1 & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}.$$

當我們計算 $\det\begin{bmatrix} 1 & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ 時, 我們可以利用上一節最後所介紹的方法, 用 elementary row operation 將矩陣先化為 echelon form. 由於我們不必動到 1-st row, 事實上我們是將 $\begin{bmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ 化為 echelon form. 因此我們有 $\det\begin{bmatrix} 1 & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$. 同理,

利用 det 的性質, 我們有

$$\det\begin{bmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ 1 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = -\det\begin{bmatrix} 1 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = -\det\begin{bmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{bmatrix},$$

$$\det\begin{bmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 1 & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = -\det\begin{bmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ 1 & a_{32} & a_{33} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix} 1 & a_{32} & a_{33} \\ 0 & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}.$$

因此依照 determinant 的性質 $\det(A)$ “應該” 定義為

$$\det\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = a_{11}\det\begin{bmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} - a_{21}\det\begin{bmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} + a_{31}\det\begin{bmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}.$$

注意, 這裡我們是根據 det 應有的性質寫下的定義, 它也確實是一個從 $\mathsf{M}_{3\times 3}$ 到 $\mathbb{R}$ 的函數 (不會將同一個矩陣送至不同的值). 不過這並不表示這樣定義出來的函數會符合當初我們要求的四個性質. 所以接下來我們將驗證這樣的定義確實會符合當初要求的四個性質, 也因此證明了 3×3 matrix 的 determinant 確實存在 (且唯一).

首先檢查 $\det(I_3) = 1$. 依定義

$$\det\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = 1\det\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - 0\det\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + 0\det\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = 1.$$

故 $\det(I_3) = 1$ 成立.

接著檢查相鄰兩個 row 互換後 determinant 會變號. 依定義

$$\det\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = a_{11}\det\begin{bmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} - a_{21}\det\begin{bmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} + a_{31}\det\begin{bmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{bmatrix},$$

$$\det\begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = a_{21}\det\begin{bmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} - a_{11}\det\begin{bmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} + a_{31}\det\begin{bmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{12} & a_{13} \end{bmatrix},$$

$$\det\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} = a_{11}\det\begin{bmatrix} a_{32} & a_{33} \\ a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} - a_{31}\det\begin{bmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} + a_{21}\det\begin{bmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}.$$

由於 2×2 matrix 的兩個 row 互換後其 determinant 會變號, 我們有

$$\det\begin{bmatrix} a_{32} & a_{33} \\ a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} = -\det\begin{bmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}, \quad \det\begin{bmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{12} & a_{13} \end{bmatrix} = -\det\begin{bmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}.$$

因此得證

$$\det\begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = -\det\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix},$$

$$\det\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} = -\det\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}.$$

至於性質 (3), (4) 我們合併檢查, 即檢查 multi-linear 性質. 依定義

$$\det\begin{bmatrix} a_{11}+rb_{11} & a_{12}+rb_{12} & a_{13}+rb_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = (a_{11}+rb_{11})\det\begin{bmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} - a_{21}\det\begin{bmatrix} a_{12}+rb_{12} & a_{13}+rb_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} + a_{31}\det\begin{bmatrix} a_{12}+rb_{12} & a_{13}+rb_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}. \tag{5.2}$$

而 2×2 matrix 的 determinant 已知有 multi-linear 的性質, 亦即

$$\det\begin{bmatrix} a_{12}+rb_{12} & a_{13}+rb_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} + r\det\begin{bmatrix} b_{12} & b_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{bmatrix},$$

$$\det\begin{bmatrix} a_{12}+rb_{12} & a_{13}+rb_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} + r\det\begin{bmatrix} b_{12} & b_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}.$$

因此式子 (5.2) 等式右邊可寫成

$$\left(a_{11}\det\begin{bmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} - a_{21}\det\begin{bmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} + a_{31}\det\begin{bmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}\right) + r\left(b_{11}\det\begin{bmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} - a_{21}\det\begin{bmatrix} b_{12} & b_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} + a_{31}\det\begin{bmatrix} b_{12} & b_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}\right).$$

再利用定義還原回 3×3 matrix determinant 得證

$$\det\begin{bmatrix} a_{11}+rb_{11} & a_{12}+rb_{12} & a_{13}+rb_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} + r\det\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

同理對於 2-nd row 和 3-rd row 我們有

$$\det\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21}+rb_{21} & a_{22}+rb_{22} & a_{23}+rb_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} + r\det\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

$$\det\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31}+rb_{31} & a_{32}+rb_{32} & a_{33}+rb_{33} \end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} + r\det\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix}$$

我們利用 2×2 matrix 的 determinant 存在來證明 3×3 matrix 的 determinant 存在, 這樣的方法稱為“降階”的方法. 下一節中, 我們要用降階的方法以及數學歸納法證明任意 $n\times n$ matrix 的 determinant 皆存在. 其實我們這裡定義出 determinant 方法稱為對 1-st column 展開的降階, 我們也可以對 2-nd column 以及 3-rd column 展開. 為了方便起見, 我們有以下的定義.

Definition 5.3.1. 假設 $A=[a_{ij}]$ 為 3×3 matrix. 將 A 的 i-th row 和 j-th column 除去所得的 2×2 matrix, 稱為 A 的 (i,j) *minor matrix*, 用 A_{ij} 表示. 令 $a'_{ij}=(-1)^{i+j}\det(A_{ij})$, 稱為 A 的 (i,j) cofactor.

依此定義, 當初 $\det(A)$ 的定義可以寫成

$$\det(A)=a_{11}a'_{11}+a_{21}a'_{21}+a_{31}a'_{31}.$$

如果我們一開始將 $\det(A)$ 定義為 $\det(A)=a_{12}a'_{12}+a_{22}a'_{22}+a_{32}a'_{32}$, 即對 2-nd column 展開, 得

$$\det\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = -a_{12}\det\begin{bmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{bmatrix} + a_{22}\det\begin{bmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{bmatrix} - a_{32}\det\begin{bmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{bmatrix}.$$

如同前面的證明會發現這個定義仍符合我們對 det 四項要求 (注意 cofactor 的正負號變化, 確保 $\det(I_3)=1$). 因此由 det 的唯一性 (參見 Theorem 5.2.8), 我們知道這樣求出的 determinant 和對 1-st column 展開的結果是一樣的. 同樣的我們也可對 3-rd column 展開得

$$\det\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = a_{13}\det\begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix} - a_{23}\det\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix} + a_{33}\det\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}.$$

又因為 $\det(A)=\det(A^{t})$, 我們可以將 A 轉置後對 A^{t} 的 1-st column 展開得

$$\det\begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix} = a_{11}\det\begin{bmatrix} a_{22} & a_{32} \\ a_{23} & a_{33} \end{bmatrix} - a_{12}\det\begin{bmatrix} a_{21} & a_{31} \\ a_{23} & a_{33} \end{bmatrix} + a_{13}\det\begin{bmatrix} a_{21} & a_{31} \\ a_{22} & a_{32} \end{bmatrix}.$$

然而 2×2 matrix 取轉置後其 determinant 也不變, 所以上式等號右邊可改寫為

$$a_{11}\det\begin{bmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} - a_{12}\det\begin{bmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{bmatrix} + a_{13}\det\begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}.$$

因此得知 $\det(A)=\det(A^{t})=a_{11}a'_{11}+a_{12}a'_{12}+a_{13}a'_{13}$, 也就是說 determinant 也可對 1-st row 展開求得. 同理對 2-nd row 和 3-rd row 展開也可求得 determinant. 我們有以下的定理.

Theorem 5.3.2. 假設 $A=[a_{ij}]$ 為 3×3 *matrix.* 令 a'_{ij} 為 A 的 (i,j) *cofactor,* 則

$$\begin{aligned} \det(A) &= a_{11}a'_{11}+a_{21}a'_{21}+a_{31}a'_{31} = a_{12}a'_{12}+a_{22}a'_{22}+a_{32}a'_{32} = a_{13}a'_{13}+a_{23}a'_{23}+a_{33}a'_{33} \\ &= a_{11}a'_{11}+a_{12}a'_{12}+a_{13}a'_{13} = a_{21}a'_{21}+a_{22}a'_{22}+a_{23}a'_{23} = a_{31}a'_{31}+a_{32}a'_{32}+a_{33}a'_{33} \end{aligned}$$

我們得到了 3×3 matrix 的 determinant, 也因此由此可定義出 $\mathbb{R}^3$ 中三個向量所張成的平行六面體的 signed volume. 也就是說若將 $\mathbb{R}^3$ 上的三個向量 $\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}$ 寫成 row vectors, 令矩陣 A 為 1-st, 2-nd, 3-rd row 依序為 $\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}$ 的 3×3 matrix, 則 $\det(A)$ 就是 $\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}$ 三個向量所張成的平行六面體的 signed volume. 其中 $\det(A)$ 的絕對值, 就是這平行六面體的體積. 而 $\det(A)$ 的正負號告訴我們 $\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}$ 這三個向量的方向性. 這裡 $\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}$ 這三個向量正反向我們是用所謂的 *right hand rule* (右手定則) 來區分, 意即將右手大拇指指向 $\mathbf{u}$ 的方向, 其餘四個指頭併攏指向 $\mathbf{v}$ 的方向, 若 $\mathbf{w}$ 位於手掌正面的方向則 $\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}$ 為正向, 反之為負向. 例如 $\mathbf{i}=(1,0,0),\mathbf{j}=(0,1,0),\mathbf{k}=(0,0,1)$ 我們定為正向 (因 $\det(I_3)=1>0$). 利用 Section 5.1 我們定的方向性規則, 可以知道 $\det(A)>0$ 時 $\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}$ 這三個向量為正向, 而 $\det(A)<0$ 時為負向.

給定 $\mathbf{u}=(a_1,a_2,a_3)$, $\mathbf{v}=(b_1,b_2,b_3)\in\mathbb{R}^3$, 我們定義 $\mathbf{u},\mathbf{v}$ 的 *cross product* (外積) $\mathbf{u}\times\mathbf{v}$ 為

$$\mathbf{u}\times\mathbf{v}=\left(\det\begin{bmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{bmatrix},\det\begin{bmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{bmatrix},\det\begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{bmatrix}\right).$$

要注意, 千萬不要將內積和外積弄混了, 兩個向量之內積是一個實數, 而兩個向量之外積仍為向量. 另外 $\mathbf{u}\times\mathbf{v}$ 和 $\mathbf{v}\times\mathbf{u}$ 是不相等的, 除非 $\mathbf{u}\times\mathbf{v}=\mathbf{0}$. 這是因為兩個 row 交

換其 determinant 會變號, 因此依定義 $\mathbf{u}\times\mathbf{v}=-\mathbf{v}\times\mathbf{u}$. 而 $\mathbf{u}\times\mathbf{v}$ 何時會是 $\mathbf{0}$ 呢? 依定義 $\mathbf{u}\times\mathbf{v}=\mathbf{0}$ 若且唯若 $\det\begin{bmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{bmatrix}=\det\begin{bmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{bmatrix}=\det\begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{bmatrix}=0$, 很容易知道這等同於 $\mathbf{u}=(a_1,a_2,a_3)$, $\mathbf{v}=(b_1,b_2,b_3)$ 為 linearly dependent.

現考慮 $\mathbf{u}=(a_1,a_2,a_3)$, $\mathbf{v}=(b_1,b_2,b_3)$, $\mathbf{w}=(c_1,c_2,c_3)$ 我們有

$$\mathbf{w}\cdot(\mathbf{u}\times\mathbf{v})=c_1\det\begin{bmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{bmatrix}+c_2\det\begin{bmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{bmatrix}+c_3\det\begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{bmatrix} \tag{5.3}$$

由於 $\det\begin{bmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{bmatrix}=-\det\begin{bmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{bmatrix}$ 式子 (5.3) 的右式又等同於將 $\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix}$ 對 3-rd row 展開的 determinant, 故得

$$\mathbf{w}\cdot(\mathbf{u}\times\mathbf{v})=(\mathbf{u}\times\mathbf{v})\cdot\mathbf{w}=\det\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix}=\det\begin{bmatrix} -\mathbf{u}- \\ -\mathbf{v}- \\ -\mathbf{w}- \end{bmatrix}. \tag{5.4}$$

也就是說 $(\mathbf{u}\times\mathbf{v})\cdot\mathbf{w}$ 就是 $\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}$ 這三個向量所張成的平行六面體的 signed volume.

特別的, 當 $\mathbf{w}=\mathbf{u}$ 或 $\mathbf{w}=\mathbf{v}$ 時, 由於 $\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}$ 為 row vector 所形成的矩陣有兩個 row 相同, 所以其 determinant 為 0 (Lemma 5.2.2). 因此由式子 (5.4) 知 $\mathbf{u}\cdot(\mathbf{u}\times\mathbf{v})=\mathbf{v}\cdot(\mathbf{u}\times\mathbf{v})=0$. 也就是說當 $\mathbf{u},\mathbf{v}$ 為 linearly independent 時, $\mathbf{u}\times\mathbf{v}$ 同時會和 $\mathbf{u}$ 以及和 $\mathbf{v}$ 垂直. 而當 $\mathbf{w}=\mathbf{u}\times\mathbf{v}$, 我們有 $(\mathbf{u}\times\mathbf{v})\cdot(\mathbf{u}\times\mathbf{v})=\|\mathbf{u}\times\mathbf{v}\|^2$. 也就是 $\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{u}\times\mathbf{v}$ 所張成的平行六面體的 signed volume 為 $\|\mathbf{u}\times\mathbf{v}\|^2$. 考慮 $\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{u}\times\mathbf{v}$ 所張成的平行六面體以 $\mathbf{u},\mathbf{v}$ 所張的平行四邊形為底, 此時由於 $\mathbf{u}\times\mathbf{v}$ 和 $\mathbf{u}$ 以及和 $\mathbf{v}$ 垂直, 我們得 $\|\mathbf{u}\times\mathbf{v}\|$ 就是此平行六面體的高. 因此由 $\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{u}\times\mathbf{v}$ 所張成的平行六面體的體積 $\|\mathbf{u}\times\mathbf{v}\|^2$ 為 $\mathbf{u},\mathbf{v}$ 所張的平行四邊形面積乘上高 $\|\mathbf{u}\times\mathbf{v}\|$, 得 $\mathbf{u},\mathbf{v}$ 所張的平行四邊形面積為 $\|\mathbf{u}\times\mathbf{v}\|$. 另外由於 $\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{u}\times\mathbf{v}$ 所張成的平行六面體的 signed volume 為 $\|\mathbf{u}\times\mathbf{v}\|^2>0$, 我們知 $\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{u}\times\mathbf{v}$ 利用右手定則為正向. 最後我們將外積的性質歸納如下.

Theorem 5.3.3. *給定 $\mathbf{u},\mathbf{v}\in\mathbb{R}^3$. 則 $\mathbf{u}\times\mathbf{w}\neq\mathbf{0}$ 若且唯若 $\mathbf{u},\mathbf{v}$ 為 linearly independent. 此時 $\mathbf{u}\times\mathbf{v}$ 的長度為 $\mathbf{u},\mathbf{v}$ 所張的平行四邊形面積, 且 $\mathbf{u},\mathbf{v}$ 同時與 $\mathbf{u}\times\mathbf{v}$ 垂直, 又 $\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{u}\times\mathbf{v}$ 利用右手定則為正向.*

又假設 $\mathbf{w}\in\mathbb{R}$, 則 $(\mathbf{u}\times\mathbf{v})\cdot\mathbf{w}\neq 0$ 若且唯若 $\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}$ 為 linearly independent. 此時 $(\mathbf{u}\times\mathbf{v})\cdot\mathbf{w}$ 就是 $\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}$ 這三個向量所張成的平行六面體的 signed volume.

5.4. Existence of the Determinant Function

在上一節中, 我們利用降階的方法以及 2×2 matrix 的 determinant 的存在性建構了 3×3 matrix 的 determinant, 因而得到其存在性. 接著我們可利用 3×3 matrix 的 determinant 存在性得到 4×4 matrix 的 determinant 的存在性, 然後一直下去. 在本節中, 我們就是要用數學歸納法證明一般 $n\times n$ matrix 的 determinant 皆存在.

首先我們將 Definition 5.3.1 的定義推廣到一般的情形.

Definition 5.4.1. 假設 $A=[a_{ij}]$ 為 $n\times n$ matrix. 將 A 的 i-th row 和 j-th column 除去所得的 $(n-1)\times(n-1)$ matrix, 稱為 A 的 (i,j) *minor matrix*, 用 A_{ij} 表示. 當 $(n-1)\times(n-1)$ matrix 的 determinant 存在時, 令 $a'_{ij}=(-1)^{i+j}\det(A_{ij})$, 稱為 A 的 (i,j) cofactor.

現利用數學歸納法假設 $(n-1)\times(n-1)$ matrix 的 determinant 存在, 對於 $n\times n$ matrix $A=[a_{ij}]$, 固定 $k\in\{1,\ldots,n\}$, 我們考慮 A 對 k-th column 展開, 定義

$$\det(A)=a_{1k}a'_{1k}+a_{2k}a'_{2k}+\cdots+a_{nk}a'_{nk}.$$

我們要利用 $(n-1)\times(n-1)$ matrix 的 determinant 符合 determinant 所要求的四個性質來證明這樣定出 $n\times n$ matrix 的 determinant 也會符合這四個性質.

首先證明 $\det(I_n)=1$. 由於 I_n 的 k-th column 為 $\mathbf{e}_k$, 僅有在 k-th entry 為 1, 其餘位置為 0. 也就是說若令 $A=[a_{ij}]=I_n$, 則 $a_{ik}=0$ for $i\neq k$ 且 $a_{kk}=1$. 因此依定義我們有 $\det(I_n)=a_{kk}a'_{kk}=a'_{kk}$. 然而 $A=I_n$ 在 (k,k) 的 minor matrix 為 I_{n-1}, 因此得 $A=I_n$ 的 (k,k) cofactor 為 $a'_{kk}=(-1)^{k+k}\det(I_{n-1})=\det(I_{n-1})$. 但依 induction 的假設, $\det(I_{n-1})=1$, 故知 $a'_{kk}=1$, 得證 $\det(I_n)=1$.

接著檢查相鄰兩個 row 互換後 determinant 會變號. 假設 $A=[a_{ij}]$, 固定 $l\in\{1,\ldots,n-1\}$, 假設將 A 的 l-th row 和 $l+1$-th row 交換所得的矩陣為 $B=[b_{ij}]$. 也就是說當 $i\neq l,l+1$ 時, $b_{ij}=a_{ij}$ 而 $b_{lj}=a_{l+1\,j}$, $b_{l+1\,j}=a_{lj}$. 因而我們有當 $i<l$ 時, B 的 (i,k) minor matrix B_{ik} 就是將 A 的 (i,k) minor matrix A_{ik} 相鄰的 $l-1$-th, l-th 兩個 row 交換 (此時依歸納假設 $\det(B_{ik})=-\det(A_{ik})$). 而當 $i>l+1$ 時, B_{ik} 就是將 A_{ik} 相鄰的 l-th, $l+1$-th 兩個 row 交換 (此時依歸納假設 $\det(B_{ik})=-\det(A_{ik})$). 又 B_{lk} 就是 $A_{l+1\,k}$ 且 $B_{l+1\,k}$ 就是 A_{lk}. 因此我們有 B 的 (i,k) cofactor b'_{ik} 為

$$(-1)^{i+k}\det(B_{ik})=\begin{cases}(-1)^{i+k}(-\det(A_{ik}))=-a'_{ik}, & \text{if } i\neq l \text{ and } i\neq l+1;\\ (-1)^{l+k}\det(A_{l+1\,k})=-a'_{l+1\,k}, & \text{if } i=l;\\ (-1)^{i+1+k}\det(A_{lk})=-a'_{lk}, & \text{if } i=l+1;\end{cases}$$

由此得證

$$\begin{array}{rcccccccccc}\det(B) & = & b_{1k}b'_{1k} & +\cdots+ & b_{lk}b'_{lk} & + & b_{l+1\,k}b'_{l+1\,k} & +\cdots+ & b_{nk}b'_{nk}\\ & = & a_{1k}(-a'_{1k}) & +\cdots+ & a_{l+1\,k}(-a'_{l+1\,k}) & + & a_{lk}(-a'_{lk}) & +\cdots+ & a_{nk}(-a'_{nk})\\ & = & -\det(A) & & & & & & \end{array}$$

至於性質 (3), (4) 我們合併檢查, 即檢查 multi-linear 性質. 固定 $l\in\{1,\ldots,n-1\}$ 以及 $r\in\mathbb{R}$. 假設 $A=[a_{ij}]$, $B=[b_{ij}]$, $C=[c_{ij}]$ 為 $n\times n$ matrices 滿足當 $i\neq l$ 時 $a_{ij}=b_{ij}=c_{ij}$ 而 $a_{lj}=b_{lj}+rc_{lj}$. 當 $i<l$ 時, A 的 (i,k) minor matrix A_{ik} 的 $l-1$-th row 就是 B_{ik} 的 $l-1$-th row 加上 r 倍的 C_{ik} 的 $l-1$-th row (此時依歸納假設 $\det(A_{ik})=\det(B_{ik})+r\det(C_{ik})$). 而當 $i>l+1$ 時, A_{ik} 的 l-th row 就是 B_{ik} 的 l-th row 加上 r 倍的 C_{ik} 的 l-th row (此時依歸納假設 $\det(A_{ik})=\det(B_{ik})+r\det(C_{ik})$). 又 A_{lk} 等於 B_{lk} 且等於 C_{lk}. 因此我們有 A 的 (i,k) cofactor a'_{ik} 為

$$(-1)^{i+k}\det(A_{ik})=\begin{cases}(-1)^{i+k}(\det(B_{ik})+r\det(B_{ik})=b'_{ik}+rc'_{ik}, & \text{if } i\neq l;\\ (-1)^{l+k}\det(B_{lk})=(-1)^{l+k}\det(C_{lk})=b'_{lk}=c'_{lk}, & \text{if } i=l;\end{cases}$$

由此得證

$$\begin{array}{rcccccc}
\det(A) & = & a_{1k}a'_{1k} & +\cdots+ & a_{lk}a'_{lk} & +\cdots+ & a_{nk}a'_{nk} \\
 & = & b_{1k}(b'_{1k}+rc'_{1k}) & +\cdots+ & (b_{lk}+rc_{lk})b'_{lk} & +\cdots+ & b_{nk}(b'_{nk}+rc'_{nk}) \\
 & = & b_{1k}b'_{1k}+rc_{1k}c'_{1k} & +\cdots+ & b_{lk}b'_{lk}+rc_{lk}c'_{lk} & +\cdots+ & b_{nk}b'_{nk}+rc_{nk}c'_{nk} \\
 & = & \det(B)+r\det(C). & & & &
\end{array}$$

我們證得了 det 的存在性, 再加上 Theorem 5.2.8 的唯一性, 我們有以下的結論.

Theorem 5.4.2. 存在唯一的函數 $\det : \mathsf{M}_{n\times n}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ 滿足

(1) $\det(I_n) = 1$.

(2) 若將 $n\times n$ *matrix* A 某相鄰兩個 *row* 交換所得的矩陣為 A', 則 $\det(A') = -\det(A)$.

(3) 若將 $n\times n$ *matrix* A 某個 *row* 乘上非零實數 r 所得的矩陣為 A', 則 $\det(A') = r\det(A)$.

(4) 若 A,B,C 三個 $n\times n$ *matrix,* 其中 A 的 *i-th row* 是 B 和 C 的 *i-th row* 之和, 而 A,B,C 其他各 *row* 皆相等, 則 $\det(A) = \det(B)+\det(C)$.

由於我們證得了對任意的 column 展開所得的 determinant 皆符合上述四項性質, 因此由唯一性得到對任意 column 展開所得的 determinant 之值皆會相同. 另外和 3×3 的情形相同, 由於 $\det(A^{\mathrm{t}}) = \det(A)$, 我們也得到對任意 row 展開所得的 determinant 之值皆會相同. 因此我們有以下的結果.

Theorem 5.4.3. 假設 $A = [a_{ij}]$ 為 $n\times n$ *matrix.* 令 a'_{ij} 為 A 的 (i,j) *cofactor,* 則對任意 $k\in\{1,\ldots,n\}$ 皆有 $\det(A) = a_{1k}a'_{1k}+a_{2k}a'_{2k}+\cdots+a_{nk}a'_{nk} = a_{k1}a'_{k1}+a_{k2}a'_{k2}+\cdots+a_{kn}a'_{kn}$.

Question 5.2. 對於 $n\times n$ *matrix* $A = [a_{ij}]$ 考慮 A 的 *diagonal entry* 展開, 即考慮

$$a_{11}a'_{11}+a_{22}a'_{22}+\cdots+a_{nn}a'_{nn}.$$

試問這樣的展開方法會符合我們要求 *determinant* 的四項規則的哪幾項?

雖然我們利用 elementary row operations 的方法證明了 determinant 的唯一性, 又用降階的方法證明了 determinant 的存在性, 不過在計算 determinant 時, 這兩種方法都可混用. 一般來說用 row operation 或 column operation 來求 determinant 較快, 不過若發現有的 row 或 column 僅有一個不是 0 的 entry, 則對該 row 或 column 降階, 也可幫助我們較快算出 determinant. 我們看以下的例子.

Example 5.4.4. 我們求 $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & 3 & 3 \\ 4 & -2 & 7 & 8 \end{bmatrix}$ 的 determinant. 首先觀察 A 的 1-st column 僅有兩個 entry 不為 0, 所以利用 1-st row 乘上 -2 加到 4-th row 得 $B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$ (此時 $\det(A) = \det(B)$). 現因 B 的 1-st column 僅有一個非 0 entry, 我們對 1-st column 降

階展開得 $\det(B)=2\det(C)$ 其中 C 為 B 的 $(1,1)$ minor matrix, 即 $C=\begin{bmatrix}2&1&2\\5&3&3\\0&1&-2\end{bmatrix}$. 接著將 C 的 2-nd column 乘上 2 加到 3-rd column 得 $D=\begin{bmatrix}2&1&4\\5&3&9\\0&1&0\end{bmatrix}$ (此時 $\det(C)=\det(D)$). 最後對 D 的 3-rd row 展開得 $\det(D)=(-1)^{3+2}\det\begin{bmatrix}2&4\\5&9\end{bmatrix}=2$. 故知 $\det(A)=\det(B)=2\det(C)=2\det(D)=4$. $\sharp$

5.5. Cramer's Rule and Adjoint Matrix

Determinant 不只可以幫助我們計算平行多面體的有向體積, 其實它也可以幫助我們解聯立方程組以及找到 invertible matrix 的反矩陣. 在這一節中, 由於和矩陣乘法有關, 所以所有向量皆用 column vector 表示.

首先考慮 $n\times n$ matrix $A=[a_{ij}]$ 對於 $j\in\{1,\ldots,n\}$ 令 $\mathbf{a}_j$ 表示 A 的 j-th column. 現對於 $\mathbb{R}^n$ 的一個 vector $\mathbf{c}=\begin{bmatrix}c_1\\\vdots\\c_n\end{bmatrix}$, 對於任意 $k\in\{1,\ldots,n\}$, 考慮 C_k 為將 identity matrix I_n 的 k-th column 用 $\mathbf{c}$ 取代的 $n\times n$ matrix. 亦即當 $j\neq k$ 時, C_k 的 j-th column 為 $\mathbf{e}_j$, 而 C_k 的 k-th column 為 $\mathbf{c}$. 現考慮 AC_k, 依矩陣乘法的定義, 我們有

$$AC_k=\begin{bmatrix}|&&|\\\mathbf{a}_1&\cdots&\mathbf{a}_n\\|&&|\end{bmatrix}\begin{bmatrix}|&&c_1&&|\\\mathbf{e}_1&\cdots&\vdots&\cdots&\mathbf{e}_n\\|&&c_n&&|\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}|&&|&&|\\\mathbf{a}_1&\cdots&c_1\mathbf{a}_1+\cdots+c_n\mathbf{a}_n&\cdots&\mathbf{a}_n\\|&&|&&|\end{bmatrix}. \tag{5.5}$$

也就是說當 $j\neq k$ 時, AC_k 的 j-th column 為 $\mathbf{a}_j$, 而 AC_k 的 k-th column 為 $c_1\mathbf{a}_1+\cdots+c_n\mathbf{a}_n$. 現對於 $\mathbf{b}=\begin{bmatrix}b_1\\\vdots\\b_n\end{bmatrix}$ 若 $x_1=c_1,\ldots,x_n=c_n$ 為聯立方程組 $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$ 的一組解, 亦即

$$c_1\mathbf{a}_1+\cdots+c_n\mathbf{a}_n=\begin{bmatrix}|&&|\\\mathbf{a}_1&\cdots&\mathbf{a}_n\\|&&|\end{bmatrix}\begin{bmatrix}c_1\\\vdots\\c_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}b_1\\\vdots\\b_n\end{bmatrix}=\mathbf{b}. \tag{5.6}$$

因此若令 B_k 表示將 A 的 k-th column 用 $\mathbf{b}$ 取代的 $n\times n$ matrix, 即

$$B_k=\begin{bmatrix}|&&|&&|\\\mathbf{a}_1&\cdots&\mathbf{b}&\cdots&\mathbf{a}_n\\|&&|&&|\end{bmatrix},$$

則結合式子 (5.5) (5.6), 我們有 $AC_k=B_k$. 因此由 determinant 的乘法性質 (Theorem 5.2.6 (2)), 得 $\det(A)\det(C_k)=\det(B_k)$. 然而對 C_k 的 k-th row 展開, 我們有 $\det(C_k)=(-1)^{k+k}c_k\det(I_{n-1})=c_k$. 因此得證以下之定理.

Theorem 5.5.1. *假設 A 為 $n\times n$ matrix 且 $\mathbf{b}\in\mathbb{R}^n$ 為 column vector. 對於 $k\in\{1,\ldots,n\}$ 令 B_k 表示將 A 的 k-th column 用 $\mathbf{b}$ 取代的 $n\times n$ matrix. 若 $x_1=c_1,\ldots,x_n=c_n$ 為聯立方程組 $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$ 的一組解, 則 $c_k\det(A)=\det(B_k)$.*

我們可以利用 Theorem 5.5.1 得到許多和解聯立方程組有關的性質. 首先若 $\det(A) \neq 0$, 表示 A 為 invertible, 我們知聯立方程組 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 一定有解且解唯一. 事實上此時由 Theorem 5.5.1 我們可以將此組解具體寫出. 這就是所謂的 *Cramer's Rule.*

Corollary 5.5.2 (Cramer's Rule)**.** 假設 A 為 $n \times n$ *invertible matrix* 且 $\mathbf{b} = \in \mathbb{R}^n$ 為 *column vector.* 對於所有 $k \in \{1, \ldots, n\}$ 令 B_k 表示將 A 的 *k-th column* 用 $\mathbf{b}$ 取代的 $n \times n$ *matrix.* 則聯立方程組 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 有唯一的一組解, 且其解為

$$x_k = \frac{\det(B_k)}{\det(A)}, \forall k = 1, \ldots, n.$$

Proof. 由假設 A 為 invertible, 知 $\det(A) \neq 0$ 且 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 必有解 (且解唯一). 然而 Theorem 5.5.1 告訴我們如果聯立方程組 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 有解, 則其解 $x_1 = c_1, \ldots, x_n = c_n$ 需滿足 $c_k \det(A) = \det(B_k), \forall k = 1, \ldots, n$. 然而因 $\det(A) \neq 0$, 故由解的存在性知 $x_k = \det(B_k)/\det(A), \forall k = 1, \ldots, n$ 是唯一可能的一組解. □

Example 5.5.3. 考慮 Example 5.4.4 中的矩陣 $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & 3 & 3 \\ 4 & -2 & 7 & 8 \end{bmatrix}$. 令 $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, 前面已知 $\det(A) = 4 \neq 0$, 我們可用 Cramer's rule 解聯立方程組 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$. 此時將 $\mathbf{b}$ 置換於 A 的 1-st column, 得 $B_1 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & 3 & 3 \\ 0 & -2 & 7 & 8 \end{bmatrix}$. 同理得 $B_2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 4 & 0 & 7 & 8 \end{bmatrix}$, $B_3 = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 & 5 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 5 & 0 & 3 \\ 4 & -2 & 0 & 8 \end{bmatrix}$, $B_4 = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 3 & 0 \\ 4 & -2 & 7 & 0 \end{bmatrix}$. 利用降階, 我們得 $\det(B_1) = 42$, $\det(B_2) = 12$, $\det(B_3) = -16$, $\det(B_4) = -4$. 故由 Cramer's rule 知 $x_1 = 21/2$, $x_2 = 3$, $x_3 = -4$, $x_4 = -1$ 是聯立方程組 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 之唯一一組解. 若令 $C_1 = \begin{bmatrix} 21/2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ 我們會有

$$AC_1 = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & 3 & 3 \\ 4 & -2 & 7 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 21/2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & 3 & 3 \\ 0 & -2 & 7 & 8 \end{bmatrix} = B_1.$$

同理若令

$$C_2 = \begin{bmatrix} 1 & 21/2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, C_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 21/2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}, C_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 21/2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix},$$

我們會有 $AC_2 = B_2$, $AC_3 = B_3$ 以及 $AC_4 = B_4$. ♯

至於當 A 不是 invertible 時 (即 $\det(A) = 0$), Theorem 5.5.1 就無法幫助我們找出聯立方程組的解. 不過由於 $\det(A) = 0$, 故利用 Theorem 5.5.1 知若 $x_1 = c_1, \ldots, x_n = c_n$ 為聯立方程

組 $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$ 的一組解, 則 $\det(B_k)=c_k\det(A)=0$, $\forall k=1,\ldots,n$. 換言之, 若存在 $k\in\{1,\ldots,n\}$ 使得 $\det(B_k)\neq 0$, 則聯立方程組 $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$ 就無解.

Corollary 5.5.4. *假設 A 為 $n\times n$ non-invertible matrix 且 $\mathbf{b}\in\mathbb{R}^n$ 為 column vector. 對於所有 $k\in\{1,\ldots,n\}$ 令 B_k 表示將 A 的 k-th column 用 $\mathbf{b}$ 取代的 $n\times n$ matrix. 若存在 $k\in\{1,\ldots,n\}$ 使得 $\det(B_k)\neq 0$, 則聯立方程組 $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$ 無解.*

要注意 Corollary 5.5.4 的反向並不成立. 也就是說當 A 不是 invertible 時, 若對所有 $k=1,\ldots,n$, 皆有 $\det(B_k)=0$, 那麼我們是無從判斷聯立方程組 $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$ 是否有解的. 例如在 $A=\begin{bmatrix}1&1&1\\2&2&2\\3&3&3\end{bmatrix}$, $\mathbf{b}=\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}$ 的情形很容易判斷 $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$ 有解, 且 $\det(A)=\det(B_1)=\det(B_2)=\det(B_3)=0$. 而當 $\mathbf{b}=\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$ 時, 很容易判斷 $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$ 無解, 但此時仍有 $\det(A)=\det(B_1)=\det(B_2)=\det(B_3)=0$.

Exercise 5.5. 考慮形式為 $\begin{bmatrix}A&C\\O&B\end{bmatrix}$ 的 $(m+n)$ 階方陣 M，其中 A,B 分別為 m 階、n 階方陣, 而 O 為 $n\times m$ 階零矩陣，C 為 $m\times n$ 階矩陣。

(1) 設 $M=\begin{bmatrix}1&4&1&-3\\2&10&0&1\\0&0&2&2\\0&0&-2&1\end{bmatrix}$. 請說明寫成題設形式，其中 A, B 矩陣分別為何。請利用 elementary row operations 分別求 $\det A$、$\det B$ 以及 $\det M$。

(2) 證明在一般情況 $\det M=(\det A)(\det B)$.

Exercise 5.6. 利用數學歸納法 (先從階數小的開始，找到規律性) 求以下 n 階方陣的行列式.

(1) $A=[a_{ij}]$ 其中 $a_{ij}=\begin{cases}1, & \text{if } i+j=n+1;\\ 0, & \text{otherwise.}\end{cases}$

例如 $n=2$ 時 $A=\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}$; $n=3$ 時 $A=\begin{bmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{bmatrix}$.

(2) $B=[b_{ij}]$ 其中 $b_{ij}=\begin{cases}j, & \text{if } i=1;\\ j, & \text{if } i>1 \text{ and } j>i;\\ -j, & \text{if } i>1 \text{ and } j<i;\\ 0, & \text{otherwise.}\end{cases}$

例如 $n=2$ 時 $B=\begin{bmatrix}1&2\\-1&0\end{bmatrix}$; $n=3$ 時 $B=\begin{bmatrix}1&2&3\\-1&0&3\\-1&-2&0\end{bmatrix}$.

Exercise 5.7. 以下為探討 Vandermonde matrix. 假設 $c_1, c_2, \ldots, c_{n-1}$ 為相異實數. 考慮多項式

$$f(x) = \det \begin{bmatrix} 1 & c_1 & \cdots & c_1^{n-1} \\ 1 & c_2 & \cdots & c_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & c_{n-1} & \cdots & c_{n-1}^{n-1} \\ 1 & x & \cdots & x^{n-1} \end{bmatrix}.$$

(1) 例如 $n=3$ 時, $f(x) = \det \begin{bmatrix} 1 & c_1 & c_1^2 \\ 1 & c_2 & c_2^2 \\ 1 & x & x^2 \end{bmatrix}$. 利用對 3-rd row 降階方式，證明此時 $f(x)$ 的最高次項為 $(c_2 - c_1)x^2$.

(2) 當 $n=3$ 時, 說明 c_1, c_2 為 $f(x)=0$ 的兩相異實根, 並依此利用因式定理證明

$$\det \begin{bmatrix} 1 & c_1 & c_1^2 \\ 1 & c_2 & c_2^2 \\ 1 & c_3 & c_3^2 \end{bmatrix} = (c_2 - c_1)(c_3 - c_2)(c_3 - c_1).$$

(3) 利用數學歸納法證明在一般情形 $f(x)$ 的最高次項為

$$\prod_{1 \le i < j \le n-1} (c_j - c_i) x^{n-1}.$$

試說明 $f(x)=0$ 所有的 $n-1$ 個實根為何，並依此證明

$$\det \begin{bmatrix} 1 & c_1 & \cdots & c_1^{n-1} \\ 1 & c_2 & \cdots & c_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & c_{n-1} & \cdots & c_{n-1}^{n-1} \\ 1 & c_n & \cdots & c_n^{n-1} \end{bmatrix} = \prod_{1 \le i < j \le n} (c_j - c_i).$$

Exercise 5.8. 考慮聯立方程組 $\begin{cases} x + 2y + z = 1 \\ 2x + 3y = 2 \\ x + 4y + 2z = -1 \end{cases}$ 利用 Cramer's rule 處理聯立方程組的方法，寫出解 x, y, z 有關的三組矩陣乘法等式，並解出 x, y, z.