

由上面這幾種情況可知, Cramer's rule 並不是有效處理聯立方程組的方法. 一般在處理特定的聯立方程組, 還是直接用 elementary row operations 處理較為快速. 不過在處理一般抽象的方程組問題時, Cramer's rule 因為可以具體描繪出解的形式, 所以是很有用的工具. 我們看以下的性質.

Proposition 5.5.5. 假設 $A = [a_{ij}]$ 為 $n \times n$ matrix 其中 $a_{ij} \in \mathbb{Z}, \forall i, j \in \{1, \dots, n\}$. 若 $\det(A) = \pm 1$, 則對於任意 $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$, 其中 $b_i \in \mathbb{Z}, \forall i \in \{1, \dots, n\}$, 聯立方程組 $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ 的解皆為整數.

Proof. 由於 $\det(A) = \pm 1 \neq 0$, 利用 Cramer's rule 我們有聯立方程組 $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ 的解為 $x_1 = \pm \det(B_1), \dots, x_n = \pm \det(B_n)$, 其中對任意 $k \in \{1, \dots, n\}$, B_k 為將 A 的 k -th column 用 \mathbf{b} 取代的 $n \times n$ matrix. 由於 $a_{ij} \in \mathbb{Z}$ 且 $b_i \in \mathbb{Z}, \forall i, j \in \{1, \dots, n\}$. 我們知矩陣 B_k 的所有 entry 皆為整數. 利用 determinant 的定義, 我們知此時 $\det(B_k)$ 亦為整數, 得證聯立方程組 $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ 的解皆為整數. \square

另外一個 Cramer's rule 的應用就是幫我們找到 invertible matrix 的 inverse. 假設 $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ 為 invertible 且 C 為 A 的 inverse, 則由 $AC = I_n$, 依矩陣乘法定義我們知 C 的 j -th column $\begin{bmatrix} c_{1j} \\ \vdots \\ c_{nj} \end{bmatrix}$ 需滿足 $A \begin{bmatrix} c_{1j} \\ \vdots \\ c_{nj} \end{bmatrix}$ 等於 I_n 的 j -th column \mathbf{e}_j . 也就是說 C 的 j -th column 為聯立方程組 $\mathbf{Ax} = \mathbf{e}_j$ 的解. 因此 C 的 (i, j) -th entry c_{ij} 應為聯立方程組 $\mathbf{Ax} = \mathbf{e}_j$ 的解中 x_i 之值. 故由 Cramer's rule 知 $c_{ij} = \det(A(j, i)) / \det(A)$, 其中 $A(j, i)$ 表示將 A 的 i -th column 用 \mathbf{e}_j 取代的 $n \times n$ matrix. 然而利用對 $A(j, i)$ 的 i -th column 展開求 $\det(A(j, i))$, 我們得 $\det(A(j, i)) = (-1)^{j+i} \det(A_{ji}) = a'_{ji}$. 也就是說 c_{ij} 就是 A 的 (j, i) cofactor (注意 i, j 位置交換) 除以 $\det(A)$. 為了方便起見我們有以下的定義.

Definition 5.5.6. 假設 $A = [a_{ij}]$ 為 $n \times n$ matrix, 對於任意 $i, j \in \{1, \dots, n\}$ 令 a'_{ij} 為 A 的 (i, j) cofactor. 考慮 $n \times n$ matrix A' 其 (i, j) -th entry 為 a'_{ij} . 我們稱 A' 為 A 的 cofactor matrix 而稱 A' 的 transpose $(A')^t$ 為 A 的 adjoint matrix, 用 $\text{adj}(A)$ 來表示.

注意 $\text{adj}(A)$ 是將 A 的 cofactor 所成的矩陣 A' 取轉置而得, 千萬不要忘記取轉置. 另外要注意不管一個 $n \times n$ matrix 是否為 invertible, 皆可定義其 adjoint matrix.

我們回到剛才 A 為 invertible 的情況. 假設 C 為其 inverse. 依 $\text{adj}(A)$ 的定義, 我們得到 C 的 (i, j) -th entry 就是 $\text{adj}(A)$ 的 (i, j) -th entry 除以 $\det(A)$. 因此依矩陣係數積的定義, 我們有 $C = \frac{1}{\det(A)} \text{adj}(A)$. 得證了以下的定理.

Proposition 5.5.7. 假設 A 為 $n \times n$ invertible matrix. 則

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \text{adj}(A).$$

Example 5.5.8. 考慮 Example 5.4.4 中的矩陣 $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & 3 & 3 \\ 4 & -2 & 7 & 8 \end{bmatrix}$. 在 Example 5.5.3 中

我們解出 $A\mathbf{x} = \mathbf{e}_1$ 的解, 事實上就是 A 的反矩陣 A^{-1} 的 1-st column. 在 Example 5.5.3 中的 $B_1 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & 3 & 3 \\ 0 & -2 & 7 & 8 \end{bmatrix}$ 就是將 A 的 1-st column 用 \mathbf{e}_1 取代所得的矩陣 $A(1,1)$. 若我們將 B_1

的 1-st column 展開求 $\det(B_1)$ 得 $\det(B_1) = (-1)^{1+1} \det \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 5 & 3 & 3 \\ -2 & 7 & 8 \end{bmatrix} = 42$ 就是 A 的 (1,1)

cofactor. 同樣的 $B_2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 4 & 0 & 7 & 8 \end{bmatrix}$ 就是將 A 的 2-nd column 用 \mathbf{e}_1 取代所得的矩陣

$A(1,2)$. 若我們將 B_2 的 2-nd column 展開求 $\det(B_2)$ 得 $\det(B_2) = (-1)^{1+2} \det \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 3 \\ 4 & 7 & 8 \end{bmatrix} =$

12 就是 A 的 (1,2) cofactor. 同理得 B_3 是將 A 的 3-rd column 用 \mathbf{e}_1 取代所得的矩陣 $A(1,3)$ 且 $\det(B_3) = (-1)^{1+3} \det \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 0 & 5 & 3 \\ 4 & -2 & 8 \end{bmatrix} = -16$ 就是 A 的 (1,3) cofactor. 而 B_4 是將 A 的

4-th column 用 \mathbf{e}_1 取代所得的矩陣 $A(1,4)$ 且 $\det(B_4) = (-1)^{1+4} \det \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & 3 \\ 4 & -2 & 7 \end{bmatrix} = -4$ 就

是 A 的 (1,4) cofactor. 注意這裡求出的 cofactor 其實對應到 A 的 cofactor 所成的矩陣 A' 會是 A' 的 1-st row. 我們求出 A 其他的 cofactor 會有

$$a'_{21} = (-1)^{2+1} \det \begin{bmatrix} -1 & 3 & 5 \\ 5 & 3 & 3 \\ -2 & 7 & 8 \end{bmatrix} = -64, \quad a'_{22} = (-1)^{2+2} \det \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 0 & 3 & 3 \\ 4 & 7 & 8 \end{bmatrix} = -18,$$

$$a'_{23} = (-1)^{2+3} \det \begin{bmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 0 & 5 & 3 \\ 4 & -2 & 8 \end{bmatrix} = 20, \quad a'_{24} = (-1)^{2+4} \det \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 5 & 3 \\ 4 & -2 & 7 \end{bmatrix} = 10.$$

以及 $a'_{31} = 26, a'_{32} = 8, a'_{33} = -8, a'_{34} = -4, a'_{41} = -20, a'_{42} = -6, a'_{43} = 8, a'_{44} = 2$. 因此得

$$A' = \begin{bmatrix} 42 & 12 & -16 & -4 \\ -64 & -18 & 20 & 10 \\ -26 & 8 & -8 & -4 \\ -20 & -6 & 8 & 2 \end{bmatrix}, \quad \text{adj}(A) = \begin{bmatrix} 42 & -64 & -26 & -20 \\ 12 & -18 & 8 & -6 \\ -16 & 20 & -8 & 8 \\ -4 & 10 & -4 & 2 \end{bmatrix}$$

也因此得

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \text{adj}(A) = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 42 & -64 & -26 & -20 \\ 12 & -18 & 8 & -6 \\ -16 & 20 & -8 & 8 \\ -4 & 10 & -4 & 2 \end{bmatrix}.$$

由上面例子可以看出利用 adjoint matrix 求反矩陣非常複雜，所以在實際求反矩陣的情況還是利用從前學的 elementary row operation 的方法會比較快。不過在證明抽象理論時，利用 adjoint matrix 求 inverse 還是很有用的。例如當 A 的每一個 entry 皆為整數時，由於 $\text{adj}(A)$ 的每一個 entry 也皆為整數，因此若 $\det(A) = \pm 1$ ，則由 Proposition 5.5.7 我們有以下的結果。

Corollary 5.5.9. 假設 A 為 $n \times n$ matrix 其中 A 的每一個 entry 皆為整數。若 $\det(A) = \pm 1$ ，則 A^{-1} 的每一個 entry 也皆為整數。

接下來我們探討有關 adjoint 的性質。首先當 A 為 $n \times n$ invertible matrix 時，由 Proposition 5.5.7 我們知 $\text{adj}(A) = \det(A)A^{-1}$ 。因此由 A^{-1} 亦為 invertible 且 $(A^{-1})^{-1} = A$ ，我們得 $\text{adj}(A^{-1}) = \det(A^{-1})A$ 。利用 determinant 的乘法性質 (Theorem 5.2.6 (2))，我們有

$$\text{adj}(A)\text{adj}(A^{-1}) = \det(A)\det(A^{-1})A^{-1}A = \det(I_n)I_n = I_n.$$

因此得證以下性質。

Proposition 5.5.10. 假設 A 為 $n \times n$ invertible matrix，則 $\text{adj}(A)$ 也是 $n \times n$ invertible matrix 且 $\text{adj}(A)^{-1} = \text{adj}(A^{-1})$ 。

當我們考慮 A^t 的 (i, j) minor matrix $(A^t)_{ij}$ 其實是將 A 的 (j, i) minor matrix A_{ji} 取 transpose，亦即 $(A^t)_{ij} = (A_{ji})^t$ 。因此 A^t 的 (i, j) cofactor $(-1)^{i+j} \det((A^t)_{ij})$ 等於 $(-1)^{i+j} \det((A_{ji})^t) = (-1)^{j+i} \det(A_{ji})$ (我們用到 $\det(A^t) = \det(A)$)。也就是說 A^t 的 (i, j) cofactor 就是 A 的 (j, i) cofactor。因此將 A 的 cofactor matrix A' 取轉置就是 A^t 的 cofactor matrix。換言之，若我們先將 A 轉置得 A^t 再取 A^t 的 cofactor matrix 也會是 $\text{adj}(A)$ 。也因此若將 A^t 轉置得 A (因為 $(A^t)^t = A$) 後取 A 的 cofactor matrix 就會是 $\text{adj}(A^t)$ 。然而將 A 的 cofactor matrix 取轉置就是 $\text{adj}(A)$ ，因此得 $\text{adj}(A) = (\text{adj}(A^t))^t$ 。再取轉置得證以下的結果。

Proposition 5.5.11. 假設 A 為 $n \times n$ matrix，則 $\text{adj}(A^t) = \text{adj}(A)^t$ 。

當 A 為 $n \times n$ invertible matrix 時，由 Proposition 5.5.7 我們知 $\text{adj}(A) = \det(A)A^{-1}$ 。因此由矩陣乘法與係數積關係 (Proposition 2.1.10) 得

$$A(\text{adj}(A)) = A(\det(A)A^{-1}) = \det(A)(AA^{-1}) = \det(A)I_n.$$

這個性質，其實不只對 invertible matrix 成立，其實對一般的 $n \times n$ matrix 皆成立。首先考慮一般的 $n \times n$ matrix $A = [a_{ij}]$ 。依定義 $\text{adj}(A)$ 的 (i, j) -th entry 為 a'_{ji} 。因此依矩陣乘法的定義 $A(\text{adj}(A))$ 的 (i, j) -th entry 為

$$\sum_{k=1}^n a_{ik}a'_{jk} = \sum_{k=1}^n a_{ik}(-1)^{j+k} \det(A_{jk}). \quad (5.7)$$

當 $i = j$ 時，式子 (5.7) 恰為對 A 的 i -th row 展開所得的 $\det(A)$ 。因此得 $A(\text{adj}(A))$ 的 (i, i) -th entry (即 diagonal entry) 為 $\det(A)$ 。而當 $i \neq j$ 時，考慮 B 為將 A 的 j -th row 用 A 的 i -th row 取代，而其他 row 保持不變的 $n \times n$ matrix。此時對任意 $k = 1, \dots, n$ ，因為 B 的 (j, k) minor matrix 是將 B 的 j -th row 除去，所以和 A 的 (j, k) minor matrix 相同，也就是說

$B_{jk} = A_{jk}$. 然而此時 B 的 (j, k) -th entry 因為是在 j -th row, 所以和 A 的 (i, k) -th entry 是一樣的, 也就是說 $b_{jk} = a_{ik}$. 現考慮利用 B 的 j -th row 展開所得的 $\det(B)$, 依定義為

$$\det(B) = \sum_{k=1}^n b_{jk} b'_{j,k} = \sum_{k=1}^n b_{jk} (-1)^{j+k} \det(B_{jk}) = \sum_{k=1}^n a_{ik} (-1)^{j+k} \det(A_{jk}).$$

此與式子 (5.7) 是一致的. 也就是說當 $i \neq j$ 時, $A(\text{adj}(A))$ 的 (i, j) -th entry 恰為 $\det(B)$. 然而 B 的 i -th row 和 j -th row 是一樣的, 故知 $\det(B) = 0$. 因此我們證得當 $i \neq j$ 時, $A(\text{adj}(A))$ 的 (i, j) -th entry 等於 0, 也因此證得了 $A(\text{adj}(A)) = \det(A)I_n$. 利用類似的方法考慮 column 的展開, 我們也可證得 $(\text{adj}(A))A = \det(A)I_n$. 不過我們這裡想用前面有關 adjoint 和 transpose 的關係 (Proposition 5.5.11) 證明以下的定理.

Theorem 5.5.12. 假設 A 為 $n \times n$ matrix, 則

$$A(\text{adj}(A)) = (\text{adj}(A))A = \det(A)I_n.$$

Proof. 前面已證得 $A(\text{adj}(A)) = \det(A)I_n$. 因為這是對所有 $n \times n$ matrix 皆成立, 故將 A 以 A^t 代換得 $A^t(\text{adj}(A^t)) = \det(A^t)I_n$. 由 Proposition 5.5.11 以及 $\det(A^t) = \det(A)$, 我們得 $A^t(\text{adj}(A^t)) = \det(A)I_n$. 將此等式兩邊取 transpose 得證 $(\text{adj}(A))A = \det(A)I_n$. \square

再次強調, Proposition 5.5.7 的證明是利用 Cramer's rule 因此需用到 $\det(A) \neq 0$ 之假設. 而 Theorem 5.5.12 是對一般 $n \times n$ matrix 皆成立的. 然而我們可以利用 Theorem 5.5.12 推得 Proposition 5.5.7, 所以可以說 Theorem 5.5.12 是 Proposition 5.5.7 的推廣.

Example 5.5.13. 考慮 $A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix}$. 依定義, 我們有

$$\text{adj}(A) = \begin{bmatrix} \det \begin{bmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{bmatrix} & -\det \begin{bmatrix} a_2 & a_3 \\ c_2 & c_3 \end{bmatrix} & \det \begin{bmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{bmatrix} \\ -\det \begin{bmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{bmatrix} & \det \begin{bmatrix} a_1 & a_3 \\ c_1 & c_3 \end{bmatrix} & -\det \begin{bmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{bmatrix} \\ \det \begin{bmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{bmatrix} & -\det \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ c_1 & c_2 \end{bmatrix} & \det \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{bmatrix} \end{bmatrix}.$$

依矩陣乘法定義 $A(\text{adj}(A))$ 的 $(1, 1)$ -th, $(2, 2)$ -th 和 $(3, 3)$ -th entry 分別為

$$\begin{aligned} & a_1 \det \begin{bmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{bmatrix} - a_2 \det \begin{bmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{bmatrix} + a_3 \det \begin{bmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{bmatrix}, \\ & -b_1 \det \begin{bmatrix} a_2 & a_3 \\ c_2 & c_3 \end{bmatrix} + b_2 \det \begin{bmatrix} a_1 & a_3 \\ c_1 & c_3 \end{bmatrix} - b_3 \det \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ c_1 & c_2 \end{bmatrix}, \\ & c_1 \det \begin{bmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{bmatrix} - c_2 \det \begin{bmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{bmatrix} + c_3 \det \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

它們為 A 分別依 1-st, 2-nd 和 3-rd row 展開所得的 determinant, 故皆等於 $\det(A)$. 而 $A(\text{adj}(A))$ 的 $(1, 2)$ -th, $(3, 2)$ -th entry 分別為

$$-a_1 \det \begin{bmatrix} a_2 & a_3 \\ c_2 & c_3 \end{bmatrix} + a_2 \det \begin{bmatrix} a_1 & a_3 \\ c_1 & c_3 \end{bmatrix} - a_3 \det \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ c_1 & c_2 \end{bmatrix},$$

$$-c_1 \det \begin{bmatrix} a_2 & a_3 \\ c_2 & c_3 \end{bmatrix} + c_2 \det \begin{bmatrix} a_1 & a_3 \\ c_1 & c_3 \end{bmatrix} - c_3 \det \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ c_1 & c_2 \end{bmatrix},$$

它們分別是將 $\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix}$ 依 2-nd row 展開所得的 determinant, 故皆為 0. 同樣的 $A(\text{adj}(A))$ 的 (2,1)-th, (3,1)-th entry 分別為

$$b_1 \det \begin{bmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{bmatrix} - b_2 \det \begin{bmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{bmatrix} + b_3 \det \begin{bmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{bmatrix},$$

$$c_1 \det \begin{bmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{bmatrix} - c_2 \det \begin{bmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{bmatrix} + c_3 \det \begin{bmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{bmatrix},$$

它們分別是將 $\begin{bmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix}$ 依 1-st row 展開所得的 determinant, 故皆為 0. 最後 $A(\text{adj}(A))$ 的 (1,3)-th, (2,3)-th entry 分別為

$$a_1 \det \begin{bmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{bmatrix} - a_2 \det \begin{bmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{bmatrix} + a_3 \det \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{bmatrix}.$$

$$b_1 \det \begin{bmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{bmatrix} - b_2 \det \begin{bmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{bmatrix} + b_3 \det \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{bmatrix}.$$

它們分別是將 $\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix}$ 依 3-rd row 展開所得的 determinant, 所以也皆為 0. 我們得

$$A(\text{adj}(A)) = \begin{bmatrix} \det(A) & 0 & 0 \\ 0 & \det(A) & 0 \\ 0 & 0 & \det(A) \end{bmatrix} = \det(A) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

最後我們要探討 $\text{adj}(A)$ 的 determinant. 注意, 因為 $\det(A)I_n$ 是 diagonal matrix, 所以也是 upper triangular matrix. 因此依 Proposition 5.2.9 我們知 $\det(A)I_n$ 的 determinant 為其 diagonal entry 的乘積 $\det(A)^n$. 因此由 $A(\text{adj}(A)) = \det(A)I_n$ 等式兩邊取 determinant 得到以下結果.

Corollary 5.5.14. 假設 A 為 $n \times n$ matrix, 則

$$\det(\text{adj}(A)) = \det(A)^{n-1}.$$

5.6. 結論

Determinant 是 square matrix 上特有的一種函數. 它是從 $M_{n \times n}(\mathbb{R})$ 映射到 \mathbb{R} 的一種 multilinear function. 另一方面 determinant 也將 \mathbb{R}^2 中兩個向量所展出平行四邊形的有向面積以及 \mathbb{R}^3 中三個向量所展出平行六面體的有向積推廣到 \mathbb{R}^n 的情形. 利用 determinant 我們可以判斷一個 square matrix 是否為 invertible, 也可幫助我們找到一個 invertible matrix 的 inverse, 甚至將聯立方成組的解寫下. 不過一般求 determinant 的過程頗繁雜, 我們可以善用 determinant 的性質, 適時的利用 elementary row operations 以及降階的方法將它求出.

Exercise 5.9. 考慮矩陣 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & 5 \end{bmatrix}$.

- (1) 求 $\text{adj}(A)$ 以及 A^{-1} .
- (2) 試找到一個非零矩陣 C 滿足 $CB = BC = O$ (零矩陣).

Exercise 5.10. 假設 A 的每一個 entry 皆為整係數的 n 階方陣.

- (1) 利用數學歸納法證明 $\det(A)$ 為整數.
- (2) 假設 A 為可逆, 證明 A^{-1} 的每一個 entry 皆為整數若且唯若 $\det(A) = \pm 1$.

Exercise 5.11. 請證明以下有關於 adjugate (classical adjoint) matrix 的性質。

- (1) 若 A 為 n 階方陣, $r \in \mathbb{R}$, 則 $\text{adj}(rA) = r^{n-1}\text{adj}(A)$
- (2) 若 A 為 upper triangular, 則 $\text{adj}(A)$ 亦為 upper triangular.
- (3) 若 A 為 symmetric, 則 $\text{adj}(A)$ 亦為 symmetric.
- (4) 若 A, B 皆為 n 階方陣, 則 $(BA)(\text{adj}(A)\text{adj}(B)) = \det(AB)I_n$.
- (5) 若 A, B 皆為 n 階 invertible matrix, 則 $\text{adj}(AB) = \text{adj}(B)\text{adj}(A)$.
- (6) 若 A 為 n 階 invertible matrix, 則 $\text{adj}(\text{adj}(A)) = \det(A)^{n-2}A$.