

# Linear Transformations

在本章中我們介紹在 vector spaces 之間重要的函數，所謂的 linear transformation. 我們會介紹 linear transformation 相關的基本性質. 然後引進其矩陣表示法，將 linear transformation 與矩陣相連結.

## 6.1. Basic Properties

在數學中，函數是我們常常利用來了解所要探討的結構的重要工具. 在線性代數中，我們要探討的結構就是 vector space, 而 linear transformation 就是幫助我們探討及理解 vector spaces 相互之間的關係的重要函數與工具.

**6.1.1. Function.** 給定 vector spaces  $V, W$ . 若有一個從  $V$  的向量對應到  $W$  的向量的對應關係，即對任意  $\mathbf{v} \in V$ , 此對應會將  $\mathbf{v}$  對應到  $W$  中一個向量  $\mathbf{w}$ . 若對每一個  $\mathbf{v} \in V$ , 所對應到的  $\mathbf{w}$  我們用  $T(\mathbf{v})$  來表示，我們就用  $T: V \rightarrow W, T(\mathbf{v}) = \mathbf{w} \in W, \forall \mathbf{v} \in V$  來表示這一個對應關係，而稱  $T$  是一個從  $V$  到  $W$  的 *function* (函數). 這裡  $V$  稱為  $T$  的 *domain* (定義域)，而  $W$  就稱為  $T$  的 *codomain* (對應域). 注意依函數的定義，若  $T: V \rightarrow W$  是一個函數，則對任意  $\mathbf{v} \in V, T(\mathbf{v})$  一定要是  $W$  中的一個確定的向量. 也就是說  $T(\mathbf{v}) \in W$ , 而且不能一下子令  $T(\mathbf{v}) = \mathbf{w}$ , 一下子又改變成  $T(\mathbf{v}) = \mathbf{w}'$ , 但  $\mathbf{w} \neq \mathbf{w}'$ , 造成不一致的情形發生. 所以當我們在建構一個新的函數時，一定要確認這一點. 也就是說，我們必須說明定出來的函數是 *well-defined*.

另外要注意，函數的定義中並沒有要求定義域中每一個元素都要對應到不同的元素去. 也就是說若  $T: V \rightarrow W$  是一個函數，是容許在  $V$  中有兩個向量  $\mathbf{v} \neq \mathbf{v}'$ , 但  $T(\mathbf{v}) = T(\mathbf{v}')$ . 若我們多要求定義域中每一個元素都要對應到不同的元素，即  $V$  中任意兩相異向量  $\mathbf{v} \neq \mathbf{v}'$ , 所對應的  $T(\mathbf{v})$  和  $T(\mathbf{v}')$  要相異 (即  $T(\mathbf{v}) \neq T(\mathbf{v}')$ ), 則我們給這樣的函數一個特殊的名稱，稱這樣的函數為 *one-to-one* (一對一)，有時也稱為 *injective*. 另外，函數的定義中也沒有要求對應域中每一個元素都要被對應到. 也就是說若  $T: V \rightarrow W$  是一個函數，是容許在  $W$  中有向量  $\mathbf{w}$ , 沒有任何  $V$  的向量會對應到  $\mathbf{w}$  (即不存在  $\mathbf{v} \in V$  使得  $T(\mathbf{v}) = \mathbf{w}$ ). 若我們多要求對應

域中每一個元素都要被對應到, 即  $W$  中任意向量  $\mathbf{w}$ , 皆可找到  $\mathbf{v} \in V$  使得  $T(\mathbf{v}) = \mathbf{w}$ , 則我們給這樣的函數一個特殊的名稱, 稱這樣的函數為 *onto* (映成), 有時也稱為 *surjective*.

當一個函數是 one-to-one 且 onto (此時一般稱為 *bijective*), 那就更特別了. 這時候一定可以找到一個從原來函數的對應域送到原來函數的定義域的反向函數 (我們稱為原函數的 *inverse* (反函數)), 使其合成後會是將每一個元素自己映射到自己的函數 (即所謂的 *identity function*). 所以此時我們也稱這樣的函數為 *invertible* (可逆函數).

**6.1.2. Linear Transformation.** 要了解 vector spaces, 若僅是考慮一般的函數, 並無法利用向量之間的運算, 幫助我們了解這些 vector spaces 中向量的結構. 我們需要的函數是能保持向量運算的, 所以有以下之定義.

**Definition 6.1.1.** 假設  $V, W$  皆為 vector space over  $\mathbb{F}$  且  $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  為一個函數, 若  $T$  滿足對任意  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k \in V$  以及  $c_1, \dots, c_k \in \mathbb{F}$  皆有

$$T(c_1\mathbf{v}_1 + \dots + c_k\mathbf{v}_k) = c_1T(\mathbf{v}_1) + \dots + c_kT(\mathbf{v}_k).$$

則稱  $T$  為一個 *linear transformation*. 有時我們簡稱  $T$  為 *linear*.

要注意這裡  $c_1\mathbf{v}_1 + \dots + c_n\mathbf{v}_1$  是  $V$  中向量的線性組合, 而  $c_1T(\mathbf{v}_1) + \dots + c_kT(\mathbf{v}_k)$  是  $W$  中向量的線性組合, 要區分清楚. 尤其在  $V \neq W$  時要特別注意. 特別是當  $\mathbf{0} \in V$  是  $V$  的 zero vector 時, 依 linear transformation 的定義, 我們有  $T(\mathbf{0}) = T(\mathbf{0} + \mathbf{0}) = T(\mathbf{0}) + T(\mathbf{0})$ . 此時兩邊加上  $T(\mathbf{0})$  的加法反元素, 得  $T(\mathbf{0})$  應為  $W$  中的 zero vector. 也就是說一個 linear transformation  $T: V \rightarrow W$ , 會將  $V$  中的零向量映射到  $W$  中的零向量. 雖然當  $V \neq W$  時,  $V$  和  $W$  的零向量有可能是不同的, 不過一般我們都用  $\mathbf{0}$  來表示, 而不區分它. 所以我們仍用  $T(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$  來表示 linear transformation 會將  $V$  中的零向量映射到  $W$  中的零向量. 這個性質雖然簡單, 但相當有用, 我們特別將此性質敘述如下.

**Lemma 6.1.2.** 假設  $T: V \rightarrow W$  為一個 *linear transformation*. 則  $T$  會將  $V$  中的零向量映射到  $W$  中的零向量, 亦即  $T(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ .

再次提醒, 這裡兩個  $\mathbf{0}$  哪一個是  $V$  的零向量, 哪一個是  $W$  的零向量, 一定要區分清楚.

依定義要檢查  $T: V \rightarrow W$  是否為 linear transformation, 我們必須考慮  $V$  中任意有限多個向量的線性組合代入  $T$  中是否符合 linear transformation 的要求, 感覺起來很麻煩. 事實上, 如同檢查 subspace 的方法 (參見 Corollary 3.3.3), 下一個定理告訴我們, 只要檢查任兩個向量的線性組合即可.

**Proposition 6.1.3.** 假設  $V, W$  皆為 vector space over  $\mathbb{F}$  且  $T: V \rightarrow W$  為一個函數, 則  $T$  為 *linear transformation* 若且唯若對任意  $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ ,  $r \in \mathbb{F}$  皆有  $T(\mathbf{u} + r\mathbf{v}) = T(\mathbf{u}) + rT(\mathbf{v})$ .

**Proof.** ( $\Rightarrow$ ): 依  $T$  為 linear 的定義, 對任意  $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ ,  $r \in \mathbb{F}$  皆有  $T(\mathbf{u} + r\mathbf{v}) = T(\mathbf{u}) + rT(\mathbf{v})$ .

( $\Leftarrow$ ): 我們要利用對任意  $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ ,  $r \in \mathbb{F}$  皆有  $T(\mathbf{u} + r\mathbf{v}) = T(\mathbf{u}) + rT(\mathbf{v})$  這個性質來證明對任意  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k \in V$  以及  $c_1, \dots, c_k \in \mathbb{F}$  皆有  $T(c_1\mathbf{v}_1 + \dots + c_k\mathbf{v}_k) = c_1T(\mathbf{v}_1) + \dots + c_kT(\mathbf{v}_k)$ .

我們對向量的個數  $k$  作數學歸納法. 首先考慮只有一個向量的情形 (即  $k = 1$ ), 我們要證明若  $\mathbf{v}_1 \in \mathbb{R}^n$ ,  $c_1 \in \mathbb{R}$  則  $T(c_1\mathbf{v}_1) = c_1T(\mathbf{v}_1)$ . 此時考慮  $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ ,  $\mathbf{v} = \mathbf{v}_1$ ,  $r = c_1$ , 依 Lemma 6.1.2, 我們有  $T(c_1\mathbf{v}_1) = T(\mathbf{u} + r\mathbf{v}) = T(\mathbf{u}) + rT(\mathbf{v}) = \mathbf{0} + rT(\mathbf{v}) = c_1T(\mathbf{v}_1)$ . 得證  $k = 1$  的情形成立. 現假設有  $k$  個向量時成立, 亦即對任意  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k \in V$  以及  $c_1, \dots, c_k \in \mathbb{F}$  皆有  $T(c_1\mathbf{v}_1 + \dots + c_k\mathbf{v}_k) = c_1T(\mathbf{v}_1) + \dots + c_kT(\mathbf{v}_k)$ . 我們要證明對任意  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k, \mathbf{v}_{k+1} \in V$  以及  $c_1, \dots, c_k, c_{k+1} \in \mathbb{F}$  皆有  $T(c_1\mathbf{v}_1 + \dots + c_k\mathbf{v}_k + c_{k+1}\mathbf{v}_{k+1}) = c_1T(\mathbf{v}_1) + \dots + c_kT(\mathbf{v}_k) + c_{k+1}T(\mathbf{v}_{k+1})$ . 然而對此時令  $\mathbf{u} = c_1\mathbf{v}_1 + \dots + c_k\mathbf{v}_k$ ,  $\mathbf{v} = \mathbf{v}_{k+1}$  以及  $r = c_{k+1}$ . 依歸納假設我們有  $T(\mathbf{u}) = c_1T(\mathbf{v}_1) + \dots + c_kT(\mathbf{v}_k)$ , 故

$$\begin{aligned} T(c_1\mathbf{v}_1 + \dots + c_k\mathbf{v}_k + c_{k+1}\mathbf{v}_{k+1}) &= \\ T(\mathbf{u} + r\mathbf{v}) &= T(\mathbf{u}) + rT(\mathbf{v}) = c_1T(\mathbf{v}_1) + \dots + c_kT(\mathbf{v}_k) + c_{k+1}T(\mathbf{v}_{k+1}). \end{aligned}$$

故由數學歸納法知  $T$  為 linear transformation.  $\square$

**Example 6.1.4.** (1) 考慮  $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$  定義為  $T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ x_1 - x_3 \end{bmatrix}$ . 我們驗證  $T$  是一個

linear transformation. 任取  $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$ ,  $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$ , 以及  $r \in \mathbb{R}$ . 我們有  $\mathbf{u} + r\mathbf{v} = \begin{bmatrix} a_1 + rb_1 \\ a_2 + rb_2 \\ a_3 + rb_3 \end{bmatrix}$ .

故依  $T$  的定義, 我們有

$$T(\mathbf{u} + r\mathbf{v}) = T\left(\begin{bmatrix} a_1 + rb_1 \\ a_2 + rb_2 \\ a_3 + rb_3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} (a_1 + rb_1) + (a_2 + rb_2) \\ (a_1 + rb_1) - (a_3 + rb_3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 + a_2 + rb_1 + rb_2 \\ a_1 - a_3 + rb_1 - rb_3 \end{bmatrix}.$$

另一方面我們有  $T(\mathbf{u}) = T\left(\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} a_1 + a_2 \\ a_1 - a_3 \end{bmatrix}$ ,  $T(\mathbf{v}) = T\left(\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} b_1 + b_2 \\ b_1 - b_3 \end{bmatrix}$ , 故

$$T(\mathbf{u}) + rT(\mathbf{v}) = \begin{bmatrix} a_1 + a_2 \\ a_1 - a_3 \end{bmatrix} + r \begin{bmatrix} b_1 + b_2 \\ b_1 - b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 + a_2 + rb_1 + rb_2 \\ a_1 - a_3 + rb_1 - rb_3 \end{bmatrix}.$$

得證  $T(\mathbf{u} + r\mathbf{v}) = T(\mathbf{u}) + rT(\mathbf{v})$ , 故  $T$  為 linear transformation.

(2) 考慮  $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$  定義為  $T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 + 1 \\ x_1 - x_3 \end{bmatrix}$ . 我們說明  $T$  不是 linear transformation. 依  $T$  的定義, 我們有  $T(\mathbf{0}) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \neq \mathbf{0}$ , 故由 Lemma 6.1.2 知,  $T$  不是 linear transformation.

(3) 考慮  $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$  定義為  $T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x_1^2 + x_2 \\ x_1 - x_3 \end{bmatrix}$ . 我們說明  $T$  不是 linear transformation. 雖然此時  $T(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ , 但  $T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ , 而  $T\left(\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}$  得

$$T\left(\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = T\left(2\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right) \neq 2T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right).$$

此與 linear transformation 的條件不符, 故  $T$  不是 linear transformation.

接下來我們來看一個最常見的 linear transformation, 事實上以後我們會知道所有  $\mathbb{F}^n$  到  $\mathbb{F}^m$  的 linear transformation 都是這樣的形式.

**Lemma 6.1.5.** 假設  $\mathbb{F}$  為 field 且  $A \in M_{m \times n}(\mathbb{F})$ . 考慮  $T: \mathbb{F}^n \rightarrow \mathbb{F}^m$  定義為:  $T(\mathbf{v}) = A\mathbf{v}$ ,  $\forall \mathbf{v} \in V$ . 則  $T$  為一個 linear transformation.

**Proof.** 首先我們先檢查  $T$  是 well-defined, 也就是說  $T$  確實是一個從  $\mathbb{F}^n$  映到  $\mathbb{F}^m$  的函數. 任取  $\mathbf{v} \in \mathbb{F}^n$ , 依定義  $T(\mathbf{v}) = A\mathbf{v}$ . 然而  $A$  為  $m \times n$  matrix, 依矩陣乘法定義  $A\mathbf{v}$  是一個  $m \times 1$  matrix (注意這裡向量都視為 column vector, 所以  $\mathbf{v} \in \mathbb{F}^n$  為  $n \times 1$  matrix), 故  $A\mathbf{v} \in \mathbb{F}^m$ . 得  $T$  確實是一個從  $\mathbb{F}^n$  到  $\mathbb{F}^m$  的 function.

現要證明  $T$  為 linear, 亦即對任意  $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{F}^n$  以及  $r \in \mathbb{F}$ , 我們要證明  $T(\mathbf{u} + r\mathbf{v}) = T(\mathbf{u}) + rT(\mathbf{v})$ . 不過依  $T$  的定義  $T(\mathbf{u}) = A\mathbf{u}$ ,  $T(\mathbf{v}) = A\mathbf{v}$ , 而  $T(\mathbf{u} + r\mathbf{v}) = A(\mathbf{u} + r\mathbf{v})$ . 故依矩陣乘法加法的分配律 (Proposition 2.1.9 和 Proposition 2.1.10) 我們得

$$T(\mathbf{u} + r\mathbf{v}) = A(\mathbf{u} + r\mathbf{v}) = A\mathbf{u} + A(r\mathbf{v}) = A\mathbf{u} + rA\mathbf{v} = T(\mathbf{u}) + rT(\mathbf{v}).$$

□

從 Lemma 6.1.5 我們知道可以造出許多的 linear transformations. 事實上, 我們可以利用現有的 linear transformations 造出更多的 linear transformations. 首先若  $T_1, T_2$  皆為  $V$  到  $W$  的 linear transformation, 我們可以利用  $T_1, T_2$  造出新的 linear transformation,  $T_1 + T_2$ . 前面已說過, 要造出新的函數需先說明定義域和對應域是甚麼. 這裡我們定義  $T_1 + T_2$  仍為  $V$  到  $W$  的函數. 對於任意  $\mathbf{v} \in V$ , 我們定義  $(T_1 + T_2)(\mathbf{v}) = T_1(\mathbf{v}) + T_2(\mathbf{v})$ . 依此定義,  $T_1 + T_2$  確實將  $V$  的向量映射到  $W$  中. 這是因為依假設, 對任意  $\mathbf{v} \in V$ , 我們有  $T_1(\mathbf{v}) \in W$  以及  $T_2(\mathbf{v}) \in W$ , 所以自然有  $(T_1 + T_2)(\mathbf{v}) = T_1(\mathbf{v}) + T_2(\mathbf{v}) \in W$ . 所以  $T_1 + T_2: V \rightarrow W$  確實是 well-defined function. 接下來我們要說明若  $T_1: V \rightarrow W$ ,  $T_2: V \rightarrow W$  皆為 linear transformation, 則  $T_1 + T_2: V \rightarrow W$  亦為 linear transformation. 也就是說對於任意  $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$  以及  $r \in \mathbb{F}$ , 我們要證明  $(T_1 + T_2)(\mathbf{u} + r\mathbf{v}) = (T_1 + T_2)(\mathbf{u}) + r(T_1 + T_2)(\mathbf{v})$ . 首先依定義我們有

$$(T_1 + T_2)(\mathbf{u} + r\mathbf{v}) = T_1(\mathbf{u} + r\mathbf{v}) + T_2(\mathbf{u} + r\mathbf{v}).$$

接著利用  $T_1, T_2$  為 linear 我們得

$$T_1(\mathbf{u} + r\mathbf{v}) + T_2(\mathbf{u} + r\mathbf{v}) = T_1(\mathbf{u}) + rT_1(\mathbf{v}) + T_2(\mathbf{u}) + rT_2(\mathbf{v}).$$

另外, 依定義

$$(T_1 + T_2)(\mathbf{u}) + r(T_1 + T_2)(\mathbf{v}) = T_1(\mathbf{u}) + T_2(\mathbf{u}) + r(T_1(\mathbf{v}) + T_2(\mathbf{v})),$$

故由向量運算性質, 得證  $(T_1 + T_2)(\mathbf{u} + r\mathbf{v}) = (T_1 + T_2)(\mathbf{u}) + r(T_1 + T_2)(\mathbf{v})$ , 亦即  $T_1 + T_2$  為  $V$  到  $W$  的 linear transformation.

**Question 6.1.** 若  $A_1, A_2$  皆為  $m \times n$  matrix. 考慮  $T_1: \mathbb{F}^n \rightarrow \mathbb{F}^m$ ,  $T_2: \mathbb{F}^n \rightarrow \mathbb{F}^m$ , 分別定義為  $T_1(\mathbf{v}) = A_1\mathbf{v}$ ,  $T_2(\mathbf{v}) = A_2\mathbf{v}$ ,  $\forall \mathbf{v} \in \mathbb{F}^n$ . 則  $T_1 + T_2$  是怎樣的函數?

給定一個 linear transformation  $T: V \rightarrow W$ , 以及  $c \in \mathbb{F}$ , 我們也可定義函數  $cT: V \rightarrow W$ , 其定義為  $(cT)(\mathbf{v}) = c(T(\mathbf{v}))$ ,  $\forall \mathbf{v} \in V$  (也就是說它把每一個  $V$  的向量  $\mathbf{v}$  對應到  $c$  倍的  $T(\mathbf{v})$ ). 很容易看出  $rT: V \rightarrow W$  確實是一個 function. 事實上, 它也是 linear transformation. 這是因為對於任意  $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$  以及  $r \in \mathbb{F}$ , 我們有

$$(cT)(\mathbf{u} + r\mathbf{v}) = c(T(\mathbf{u} + r\mathbf{v})) = cT(\mathbf{u}) + rcT(\mathbf{v}).$$

而  $(cT)(\mathbf{u}) + r(cT)(\mathbf{v}) = c(T(\mathbf{u})) + rc(T(\mathbf{v}))$ , 故知  $(cT)(\mathbf{u} + r\mathbf{v}) = (cT)(\mathbf{u}) + r(cT)(\mathbf{v})$ , 得證  $cT: V \rightarrow W$  為 linear transformation.

**Question 6.2.** 設  $A$  為  $m \times n$  matrix. 考慮  $T: \mathbb{F}^n \rightarrow \mathbb{F}^m$  定義為  $T(\mathbf{v}) = A\mathbf{v}$ ,  $\forall \mathbf{v} \in \mathbb{F}^n$ . 則對於  $c \in \mathbb{F}$ ,  $cT$  是怎樣的函數?

設  $T_1, \dots, T_k$  為  $V$  到  $W$  的 linear transformations.  $c_1, \dots, c_k \in \mathbb{F}$ , 則由前知  $c_1T_1, \dots, c_kT_k$  皆為  $V$  到  $W$  的 linear transformations. 所以  $c_1T_1 + c_2T_2$  為 linear transformation. 再利用數學歸納法, 得  $c_1T_1 + \dots + c_kT_k$  為 linear transformation. 因此我們有下面之結果.

**Proposition 6.1.6.** 設  $T_1, \dots, T_k$  為  $V$  到  $W$  的 linear transformations,  $c_1, \dots, c_k \in \mathbb{F}$  則  $c_1T_1 + \dots + c_kT_k$  為  $V$  到  $W$  的 linear transformation.

另一個產生 linear transformation 的方法就是利用“合成函數”. 若  $U, V, W$  為 vector spaces 且  $T: U \rightarrow V$  和  $T': V \rightarrow W$  為函數, 由於對任意  $\mathbf{u} \in U$ , 依定義  $T(\mathbf{u}) \in V$ , 也就是說  $T(\mathbf{u})$  會落在  $T'$  的定義域中. 所以我們可以將  $T(\mathbf{u})$  代入  $T'$  中, 亦即得  $T'(T(\mathbf{u})) \in W$ . 這樣的方法幫我們定義出一個從  $U$  到  $W$  的函數, 稱之為  $T, T'$  的 composite function (合成函數), 我們用  $T' \circ T$  來表示. 也就是說  $T' \circ T: U \rightarrow W$  的定義為  $T' \circ T(\mathbf{u}) = T'(T(\mathbf{u}))$ ,  $\forall \mathbf{u} \in U$ . 我們有下面之結果.

**Proposition 6.1.7.** 假設  $T: U \rightarrow V$  和  $T': V \rightarrow W$  為 linear transformation, 則  $T' \circ T: U \rightarrow W$  亦為 linear transformation.

**Proof.** 已知  $T' \circ T$  為 function, 我們僅要證明  $T' \circ T$  為 linear, 亦即對於任意  $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in U$  以及  $r \in \mathbb{F}$ , 我們有  $(T' \circ T)(\mathbf{u} + r\mathbf{v}) = (T' \circ T)(\mathbf{u}) + r(T' \circ T)(\mathbf{v})$ . 依定義  $(T' \circ T)(\mathbf{u} + r\mathbf{v}) = T'(T(\mathbf{u} + r\mathbf{v}))$ . 然而因為  $T, T'$  為 linear, 故有

$$T'(T(\mathbf{u} + r\mathbf{v})) = T'(T(\mathbf{u}) + rT(\mathbf{v})) = T'(T(\mathbf{u})) + rT'(T(\mathbf{v})).$$

再由  $T'(T(\mathbf{u})) = (T' \circ T)(\mathbf{u})$  以及  $T'(T(\mathbf{v})) = (T' \circ T)(\mathbf{v})$  得證  $T' \circ T$  為 linear transformation.  $\square$

**Question 6.3.** 設  $A$  為  $m \times n$  matrix,  $B$  為  $k \times m$  matrix. 考慮  $T: \mathbb{F}^n \rightarrow \mathbb{F}^m$ ,  $T': \mathbb{F}^m \rightarrow \mathbb{F}^k$ , 分別定義為  $T(\mathbf{v}) = A\mathbf{v}$ ,  $\forall \mathbf{v} \in \mathbb{F}^n$  且  $T'(\mathbf{w}) = B\mathbf{w}$ ,  $\forall \mathbf{w} \in \mathbb{F}^m$ . 則  $T' \circ T$  是怎樣的函數?

當  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$  是  $V$  的一組 basis 時, 對任意  $\mathbf{v} \in V$ , 皆存在唯一的一組  $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{F}$ , 使得  $\mathbf{v} = c_1\mathbf{v}_1 + \dots + c_n\mathbf{v}_n$ . 現若  $T: V \rightarrow W$  是 linear transformation, 則由 linear transformation 定義知, 此時  $T(\mathbf{v}) = c_1T(\mathbf{v}_1) + \dots + c_nT(\mathbf{v}_n)$ . 也就是說, 只要我們知道  $T(\mathbf{v}_1), \dots, T(\mathbf{v}_n)$  是  $W$  中的哪些向量, 則對於任意  $\mathbf{v} \in V$ , 我們都可以知道  $T(\mathbf{v})$  為何. 因此我們有以下的定理.

**Theorem 6.1.8.** 假設  $V, W$  為 *vector spaces over  $\mathbb{F}$*  且  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n \in V$ , 為  $V$  的一組 *basis*. 給定  $\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_n \in W$ , 則存在唯一的 *linear transformation*  $T: V \rightarrow W$ , 滿足

$$T(\mathbf{v}_1) = \mathbf{w}_1, \dots, T(\mathbf{v}_i) = \mathbf{w}_i, \dots, T(\mathbf{v}_n) = \mathbf{w}_n.$$

**Proof.** 首先證明存在性. 定義  $T: V \rightarrow W$  為  $T(c_1\mathbf{v}_1 + \dots + c_n\mathbf{v}_n) = c_1\mathbf{w}_1 + \dots + c_n\mathbf{w}_n$ ,  $\forall c_1, \dots, c_n \in \mathbb{F}$ . 我們需說明這是 well-defined function. 也就是說對任意  $\mathbf{v} \in V$ ,  $T(\mathbf{v})$  皆有定義且  $T(\mathbf{v}) \in W$ . 然而因  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ , 為  $V$  的一組 *basis*, 故存在唯一的一組  $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{F}$ , 使得  $\mathbf{v} = c_1\mathbf{v}_1 + \dots + c_n\mathbf{v}_n$ . 故此時得  $T(\mathbf{v}) = T(c_1\mathbf{v}_1 + \dots + c_n\mathbf{v}_n) = c_1\mathbf{w}_1 + \dots + c_n\mathbf{w}_n \in W$ . 接著我們要說明  $T$  為 *linear transformation*, 也就是說對任意  $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$  以及  $r \in \mathbb{F}$ , 我們要證明  $T(\mathbf{u} + r\mathbf{v}) = T(\mathbf{u}) + rT(\mathbf{v})$ . 由於  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$  為  $V$  的一組 *basis*, 存在  $c_1, \dots, c_n$  以及  $d_1, \dots, d_n \in \mathbb{F}$  使得  $\mathbf{u} = c_1\mathbf{v}_1 + \dots + c_n\mathbf{v}_n$  且  $\mathbf{v} = d_1\mathbf{v}_1 + \dots + d_n\mathbf{v}_n$ . 故此時  $\mathbf{u} + r\mathbf{v} = (c_1 + rd_1)\mathbf{v}_1 + \dots + (c_n + rd_n)\mathbf{v}_n$ . 依  $T$  的定義得

$$T(\mathbf{u} + r\mathbf{v}) = (c_1 + rd_1)T(\mathbf{v}_1) + \dots + (c_n + rd_n)T(\mathbf{v}_n) = (c_1 + rd_1)\mathbf{w}_1 + \dots + (c_n + rd_n)\mathbf{w}_n.$$

另一方面

$$\begin{aligned} T(\mathbf{u}) + rT(\mathbf{v}) &= T(c_1\mathbf{v}_1 + \dots + c_n\mathbf{v}_n) + rT(d_1\mathbf{v}_1 + \dots + d_n\mathbf{v}_n) = \\ &= (c_1\mathbf{w}_1 + \dots + c_n\mathbf{w}_n) + r(d_1\mathbf{w}_1 + \dots + d_n\mathbf{w}_n) = (c_1 + rd_1)\mathbf{w}_1 + \dots + (c_n + rd_n)\mathbf{w}_n. \end{aligned}$$

得證  $T(\mathbf{u} + r\mathbf{v}) = T(\mathbf{u}) + rT(\mathbf{v})$ .

接著證明唯一性, 我們用反證法. 也就是說若  $T': V \rightarrow W$  是另一個 *linear transformation* 滿足  $T'(\mathbf{v}_1) = \mathbf{w}_1, \dots, T'(\mathbf{v}_n) = \mathbf{w}_n$ , 且  $T' \neq T$ , 則會造成矛盾. 依定義,  $T' \neq T$  表示存在  $\mathbf{v} \in V$  使得  $T'(\mathbf{v}) \neq T(\mathbf{v})$ . 此時因存在  $c_1, \dots, c_n$ , 使得  $\mathbf{v} = c_1\mathbf{v}_1 + \dots + c_n\mathbf{v}_n$ , 故依  $T, T'$  皆為 *linear* 的假設, 我們有

$$T'(\mathbf{v}) = T'(c_1\mathbf{v}_1 + \dots + c_n\mathbf{v}_n) = c_1T'(\mathbf{v}_1) + \dots + c_nT'(\mathbf{v}_n) = c_1\mathbf{w}_1 + \dots + c_n\mathbf{w}_n = T(\mathbf{v}).$$

此與  $T'(\mathbf{v}) \neq T(\mathbf{v})$  相矛盾, 證得唯一性. □

要注意 Theorem 6.1.8 中的  $\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_n \in W$  是可以任意選取的, 不需要是一組 *basis* 或是 *linear independent*. 這個定理, 再次讓我們確定 *basis* 的重要性. 它告訴我們給定  $V$  的一組 *basis* 後, 我們可以將這組 *basis* 裡的向量對應到  $W$  中任意的向量, 就會得到一個  $V$  到  $W$  的 *linear transformation*. 更重要的是, 一般來講兩個函數要說明它們是相等的, 我們必須檢查定義域裡的每個元素是否被這兩個函數對應到對應域裡相同的元素. 這個過程是很複雜的, 因為一般來說定義域裡的元素有無窮多個, 我們無法一個一個檢查. 但是 *linear transformation* 就有這個好處, Theorem 6.1.8 告訴我們僅要檢查兩個 *linear transformations* 在一組 *basis* 裡中的那些有限多個向量是一致的, 那麼這兩個 *linear transformation* 事實上就會是相同的函數.

## 6.2. Range and Null Space

*Linear transformation* 由於有保持 *linear combination* 的特點, 所以它會保持定義域對應域中的 *subspaces*. 在這一節中我們便是要探討一個 *linear transformation* 所得到

的兩個重要的 subspaces, “null space” 和 “range”, 並利用這兩個 subspace 來探討 linear transformation 本身的特點.

首先對於一般的函數  $T:V \rightarrow W$ , 任取定義域  $V$  中的子集合  $S$ , 我們很自然的會考慮  $T(S) = \{T(\mathbf{v}) \in W \mid \mathbf{v} \in S\}$  這一個集合, 它就是將所有  $S$  中的元素利用  $T$  映射到  $W$  後的元素收集起來所得的集合. 同樣的, 對於對應域  $W$  中的子集合  $S'$ , 我們也會考慮  $T^{-1}(S') = \{\mathbf{v} \in V \mid T(\mathbf{v}) \in S'\}$  這樣的集合, 它就是收集所有在定義域中會映射到  $S'$  的元素所成的集合. 很容易知道  $T(S)$  會是對應域  $W$  中的子集合, 而  $T^{-1}(S')$  會是定義域  $V$  中的子集合. 注意當  $\mathbf{w} \in T(S)$  時, 依定義這表示  $\mathbf{w}$  是  $S$  中某個元素經  $T$  映射所得, 亦即存在  $\mathbf{v} \in V$  使得  $\mathbf{w} = T(\mathbf{v})$ . 所以  $T(S)$  也可表示成  $T(S) = \{\mathbf{w} \in W \mid \mathbf{w} = T(\mathbf{v}), \text{ for some } \mathbf{v} \in S\}$ , 有時為了強調  $T(S)$  為  $W$  的子集合, 我們也會用這種表示法.

由於 linear transformation 的特色, 當  $T:V \rightarrow W$  為 linear transformation 時, 我們專注於考慮  $V'$  為  $V$  的 subspace 時的情況. 也就是說我們要了解

$$T(V') = \{T(\mathbf{v}) \in W \mid \mathbf{v} \in V'\} = \{\mathbf{w} \in W \mid \mathbf{w} = T(\mathbf{v}), \text{ for some } \mathbf{v} \in V'\}$$

的特性. 同樣的若  $W'$  為  $W$  的 subspace, 我們也要了解

$$T^{-1}(W') = \{\mathbf{v} \in V \mid T(\mathbf{v}) \in W'\}$$

的特性. 事實上, 我們有以下之結果.

**Proposition 6.2.1.** 假設  $V, W$  皆為 vector space over  $\mathbb{F}$  且  $T:V \rightarrow W$  為 linear transformation. 若  $V'$  為  $V$  的 subspaces, 則  $T(V')$  是  $W$  的 subspace. 另外, 若  $W'$  為  $W$  的 subspaces, 則  $T^{-1}(W')$  是  $V$  的 subspace.

**Proof.** 依定義我們知  $T(V')$  會是  $W$  的子集合, 而  $T^{-1}(W')$  會是  $V$  的子集合. 故現僅需證明它們為 subspaces, 即利用 Corollary 3.3.3 我們要證明, 若  $\mathbf{w}, \mathbf{w}' \in T(V')$  且  $r \in \mathbb{F}$ , 則  $\mathbf{w} + r\mathbf{w}' \in T(V')$  以及若  $\mathbf{v}, \mathbf{v}' \in T^{-1}(W')$  且  $r \in \mathbb{F}$ , 則  $\mathbf{v} + r\mathbf{v}' \in T^{-1}(W')$ .

首先再強調一次, 當我們說  $W$  中的一個向量  $\mathbf{w}$  在  $T(V')$  時, 表示存在  $\mathbf{v} \in V'$  使得  $\mathbf{w} = T(\mathbf{v})$ . 因此若  $\mathbf{w}, \mathbf{w}' \in T(V')$ , 則存在  $\mathbf{v}, \mathbf{v}' \in V'$  使得  $T(\mathbf{v}) = \mathbf{w}, T(\mathbf{v}') = \mathbf{w}'$ . 此時對於  $r \in \mathbb{F}$ , 我們有  $\mathbf{w} + r\mathbf{w}' = T(\mathbf{v}) + rT(\mathbf{v}')$ . 再利用  $T$  為 linear, 得  $\mathbf{w} + r\mathbf{w}' = T(\mathbf{v} + r\mathbf{v}')$ . 然而依假設  $V'$  為  $V$  的 subspace, 故由  $\mathbf{v}, \mathbf{v}' \in V'$  知  $\mathbf{v} + r\mathbf{v}' \in V'$ , 得證  $\mathbf{w} + r\mathbf{w}' = T(\mathbf{v} + r\mathbf{v}') \in T(V')$ .

另一方面, 若  $\mathbf{v}, \mathbf{v}' \in T^{-1}(W')$ , 表示  $T(\mathbf{v}), T(\mathbf{v}') \in W'$ . 此時對於  $r \in \mathbb{F}$ , 由於  $T$  為 linear, 我們有  $T(\mathbf{v} + r\mathbf{v}') = T(\mathbf{v}) + rT(\mathbf{v}')$ . 然而依假設  $W'$  為  $W$  的 subspace, 故由  $T(\mathbf{v}), T(\mathbf{v}') \in W'$  知  $T(\mathbf{v}) + rT(\mathbf{v}') \in W'$ . 因此由  $T(\mathbf{v} + r\mathbf{v}') = T(\mathbf{v}) + rT(\mathbf{v}') \in W'$ , 得證  $\mathbf{v} + r\mathbf{v}' \in T^{-1}(W')$ .  $\square$

特別的, 在  $V' = V$  和  $W' = \{\mathbf{0}\}$  這兩個特殊情況時, 即

$$T(V) = \{\mathbf{w} \in W \mid \mathbf{w} = T(\mathbf{v}) \text{ for some } \mathbf{v} \in V\} \quad \text{and} \quad T^{-1}(\{\mathbf{0}\}) = \{\mathbf{v} \in V \mid T(\mathbf{v}) = \mathbf{0}\}$$

這兩個 subspaces, 對我們了解  $T$  這個 linear transformation 非常有幫助. 我們先給這兩個 subspace 特殊的名稱.

**Definition 6.2.2.** 假設  $V, W$  皆為 vector space over  $\mathbb{F}$  且  $T:V \rightarrow W$  為 linear transformation.

- (1) 我們稱  $W$  的 subspace  $T(V)$  為  $T$  的 *range* (也稱為 *image*). 通常我們用  $R(T)$  (或  $\text{im}(T)$ ) 來表示  $T$  的 range.
- (2) 我們稱  $V$  的 subspace  $T^{-1}(\{\mathbf{0}\})$  為  $T$  的 *null space* (也稱為 *kernel*), 通常我們用  $N(T)$  (或  $\ker(T)$ ) 來表示  $T$  的 null space.

首先我們來看 linear transformation 的 range. 假設  $T:V \rightarrow W$  為 linear transformation. 由 Proposition 6.2.1 我們知  $T$  的 range  $R(T)$  是  $W$  的 subspace, 故知  $\dim(R(T)) \leq \dim(W)$ . 若  $\dim(R(T)) = \dim(W)$ , 則依 Proposition 3.6.9 知此時  $R(T) = W$ . 也就是說對於任意的  $\mathbf{w} \in W$ , 由於  $\mathbf{w} \in R(T)$  依定義存在  $\mathbf{v} \in V$  使得  $\mathbf{w} = T(\mathbf{v})$ . 也就是說此時  $T$  為 onto. 另一方面, 若  $T$  為 onto, 則依定義對於任意  $\mathbf{w} \in W$ , 存在  $\mathbf{v} \in V$  使得  $T(\mathbf{v}) = \mathbf{w}$  故得  $\mathbf{w} \in R(T)$ , 得證  $W \subseteq R(T)$ . 再利用已知  $R(T) \subseteq W$ , 得證  $R(T) = W$ . 我們有以下的性質.

**Proposition 6.2.3.** 假設  $T:V \rightarrow W$  為 linear transformation. 則  $T$  為 onto 若且唯若  $\dim(R(T)) = \dim(W)$ .

一般來說, 我們要判斷一個函數是否為 onto 便是要確認其 range 是否就是 codomain (對應域). 對於一般的函數要確認是否為 onto 有時並不容易. 不過 Proposition 6.2.3 告訴我們對於 linear transformation, 可以直接由它的 range 的 dimension 來判斷是否為 onto. 至於如何知道一個 linear transformation 的 range 呢? 我們有以下的性質.

**Proposition 6.2.4.** 假設  $V, W$  皆為 vector space over  $\mathbb{F}$  且  $T:V \rightarrow W$  為 linear transformation 且  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n \in V$  為  $V$  的一組 spanning vectors. 則

$$R(T) = \text{Span}(T(\mathbf{v}_1), \dots, T(\mathbf{v}_n)).$$

**Proof.** 設  $\mathbf{w} \in R(T)$ , 表示存在  $\mathbf{v} \in V$  使得  $\mathbf{w} = T(\mathbf{v})$ . 又因  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$  是  $V$  的一組 spanning vectors, 故存在  $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{F}$ , 使得  $\mathbf{v} = c_1\mathbf{v}_1 + \dots + c_n\mathbf{v}_n$ . 因此利用  $T$  為 linear 得

$$\mathbf{w} = T(\mathbf{v}) = T(c_1\mathbf{v}_1 + \dots + c_n\mathbf{v}_n) = c_1T(\mathbf{v}_1) + \dots + c_nT(\mathbf{v}_n) \in \text{Span}(T(\mathbf{v}_1), \dots, T(\mathbf{v}_n)),$$

得證  $R(T) \subseteq \text{Span}(T(\mathbf{v}_1), \dots, T(\mathbf{v}_n))$ .

另一方面, 設  $\mathbf{w} \in \text{Span}(T(\mathbf{v}_1), \dots, T(\mathbf{v}_n))$ , 表示存在  $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{F}$ , 使得  $\mathbf{w} = c_1T(\mathbf{v}_1) + \dots + c_nT(\mathbf{v}_n)$ . 因此利用  $T$  為 linear 得

$$\mathbf{w} = c_1T(\mathbf{v}_1) + \dots + c_nT(\mathbf{v}_n) = T(c_1\mathbf{v}_1 + \dots + c_n\mathbf{v}_n) \in R(T),$$

得證  $\text{Span}(T(\mathbf{v}_1), \dots, T(\mathbf{v}_n)) \subseteq R(T)$ . 因此證明了  $R(T) = \text{Span}(T(\mathbf{v}_1), \dots, T(\mathbf{v}_n))$ .  $\square$

**Example 6.2.5.** (1) 考慮  $T:\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$  定義為  $T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ x_1 - x_3 \end{bmatrix}$ . 在 Example 6.1.4 中我們已知  $T$  是一個 linear transformation. 考慮定義域  $\mathbb{R}^3$  的 standard basis  $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ , 我們得  $T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ ,  $T\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ ,  $T\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}$ . 由於  $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}$  為  $\mathbb{R}^2$  的一組

spanning vectors, 由 Proposition 6.2.4 我們有  $R(T) = \text{Span}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}\right) = \mathbb{R}^2$ . 故得  $T$  為 onto.

(2) 考慮  $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  定義為  $T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_1 + x_2 \\ x_1 - x_2 \end{bmatrix}$ . 很容易驗證  $T$  是一個 linear

transformation. 考慮定義域  $\mathbb{R}^2$  的 standard basis  $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ , 我們得  $T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ ,  $T\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) =$

$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ . 由 Proposition 6.2.4 我們有  $R(T) = \text{Span}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}\right)$ . 由於  $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$  為 linearly independent, 故得  $\dim(R(T)) = 2$ . 由 Proposition 6.2.3 知  $T$  不是 onto.

**Question 6.4.** 假設  $T: V \rightarrow W$  為 linear transformation. 若  $\dim(W) > \dim(V)$ , 則  $T$  有可能是 onto 嗎?

**Question 6.5.** 假設  $\mathbb{F}$  是 field 且  $A \in M_{m \times n}(\mathbb{F})$ , 考慮 linear transformation  $T_A: \mathbb{F}^n \rightarrow \mathbb{F}^m$  定義為  $T_A(\mathbf{v}) = A\mathbf{v}$ ,  $\forall \mathbf{v} \in \mathbb{F}^n$ . 考慮  $\mathbb{F}^n$  的 standard basis  $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$ . 試說明  $R(T_A)$  (即  $T_A$  的 rang) 和  $\text{Col}(A)$  (即  $A$  的 column space) 之間的關係.

要注意是有可能一個 linear transformation  $T$  的 range 為  $\{\mathbf{0}\}$ . 此表示  $T$  將所有定義域的向量皆映射到  $\mathbf{0}$ , 亦即  $T(\mathbf{v}) = \mathbf{0}$ ,  $\forall \mathbf{v} \in V$ . 這樣的 linear transformation, 我們依慣例, 仍稱之為 zero mapping.

**Question 6.6.** 假設  $T: V \rightarrow W$  為 linear transformation 且  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n \in V$  為  $V$  的一組 basis. 試證明  $T$  為 zero mapping 若且唯若  $T(\mathbf{v}_1) = \dots = T(\mathbf{v}_n) = \mathbf{0}$ .

接下來我們看 null space 與 linear transformation 的關係. 假設  $T: V \rightarrow W$  為 linear transformation. 若  $T$  為 one-to-one, 由於已知  $T(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ , 故知不可能有非零的向量  $\mathbf{v}$  使得  $T(\mathbf{v}) = \mathbf{0}$ . 因此可得  $N(T) = \{\mathbf{0}\}$ . 其實反過來  $N(T) = \{\mathbf{0}\}$ , 也會使得  $T$  為 one-to-one, 我們有以下的結果.

**Proposition 6.2.6.** 假設  $T: V \rightarrow W$  為 linear transformation. 則  $T$  為 one-to-one 若且唯若  $\dim(N(T)) = 0$ , 亦即  $N(T) = \{\mathbf{0}\}$ .

**Proof.** 我們已知當  $T$  為 one-to-one 時, 不會有非零向量映射到  $\mathbf{0}$ , 故知  $N(T) = \{\mathbf{0}\}$ , 得  $\dim(N(T)) = 0$ . 反之, 當  $\dim(N(T)) = 0$ , 即  $N(T) = \{\mathbf{0}\}$ , 此時若  $T$  不是 one-to-one, 表示存在  $\mathbf{v}, \mathbf{v}' \in V$  滿足  $\mathbf{v} \neq \mathbf{v}'$  但  $T(\mathbf{v}) = T(\mathbf{v}')$ . 由於  $T$  為 linear, 得  $T(\mathbf{v} - \mathbf{v}') = T(\mathbf{v}) - T(\mathbf{v}') = \mathbf{0}$ , 亦即  $\mathbf{v} - \mathbf{v}' \in T^{-1}(\{\mathbf{0}\}) = N(T) = \{\mathbf{0}\}$ . 得到  $\mathbf{v} = \mathbf{v}'$  之矛盾, 故證得  $T$  為 one-to-one.  $\square$

**Example 6.2.7.** 我們探討 Example 6.2.5 中的 linear transformation 是否為 one-to-one.

(1) 考慮  $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$  定義為  $T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ x_1 - x_3 \end{bmatrix}$ . 若  $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \in \mathbf{N}(T)$ , 表示  $T(\mathbf{v}) = T\left(\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} a+b \\ a-c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ , 故得  $a+b=0$  以及  $a-c=0$ , 因此可得  $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \in \mathbf{N}(T)$ , 知  $\mathbf{N}(T) \neq \{\mathbf{0}\}$  (事實上  $\mathbf{N}(T) = \text{Span}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$ ). 所以知  $T$  不是 one-to-one.

(2) 考慮  $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  定義為  $T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_1 + x_2 \\ x_1 - x_2 \end{bmatrix}$ . 若  $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \in \mathbf{N}(T)$ , 表示  $T(\mathbf{v}) = T\left(\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} a \\ a+b \\ a-b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ . 故得  $a=0$ ,  $a+b=0$  以及  $a-b=0$ , 即  $a=b=0$ . 因此可得  $\mathbf{N}(T) = \{\mathbf{0}\}$ , 所以由 Proposition 6.2.6 知  $T$  是 one-to-one.

要注意 Proposition 6.2.6 需  $T$  為 linear transformation 才適用. 例如  $f(x) = x^2$  的情形, 雖然  $f^{-1}(\{0\}) = \{0\}$  (因為只有當  $x=0$  才會使得  $x^2=0$ ) 但  $f(x)$  不是一對一 (例如  $f(1) = f(-1) = 1$ ). 事實上我們知道  $f(x)$  不是 linear. 所以當  $f$  不是 linear transformation 時, 不能由  $f^{-1}(\{0\})$  來判斷是否為 one-to-one.

**Question 6.7.** Proposition 6.2.6 中是哪一個部分需用到  $T$  為 linear 的假設? 是由  $T$  為 one-to-one 推得  $\mathbf{N}(T) = \{\mathbf{0}\}$  還是由  $\mathbf{N}(T) = \{\mathbf{0}\}$  推得  $T$  為 one-to-one?

**Question 6.8.** 假設  $T: V \rightarrow W$  為 linear transformation. 在 Question 6.6 中我們知道  $T$  為 zero mapping 和  $T$  的 range 的等價關係. 你知道  $T$  為 zero mapping 和  $T$  的 null space 的等價關係嗎?

**Question 6.9.** 假設  $\mathbb{F}$  是 field 且  $A \in M_{m \times n}(\mathbb{F})$ , 考慮 linear transformation  $T_A: \mathbb{F}^n \rightarrow \mathbb{F}^m$  定義為  $T_A(\mathbf{v}) = A\mathbf{v}$ ,  $\forall \mathbf{v} \in \mathbb{F}^n$ . 試說明  $\mathbf{N}(T_A)$  (即  $T_A$  的 null space) 和  $\mathbf{N}(A)$  (即  $A$  的 null space) 之間的關係.

對於一般的函數, 要判斷其是否為 onto 或是 one-to-one 並不容易, 但當  $T$  為 linear transformation 時, Proposition 6.2.3 和 Proposition 6.2.6 提供我們一個簡便的方法判斷  $T$  是否為 onto 或是 one-to-one. 也就是僅要確認  $\mathbf{R}(T)$  和  $\mathbf{N}(T)$  的維度即可. 既然  $\mathbf{R}(T)$  和  $\mathbf{N}(T)$  的維度這麼重要, 我們有以下的定義.

**Definition 6.2.8.** 假設  $V, W$  皆為 vector space over  $\mathbb{F}$  且  $T: V \rightarrow W$  為 linear transformation.

(1) 我們稱  $T$  的 range  $\mathbf{R}(T)$  的維度為  $T$  的 rank, 記做  $\text{rank}(T)$ .

(2) 我們稱  $T$  的 null space  $\mathbf{N}(T)$  的維度為  $T$  的 nullity, 記做  $\text{nullity}(T)$ .

**Question 6.10.** 假設  $\mathbb{F}$  是 field 且  $A \in M_{m \times n}(\mathbb{F})$ , 考慮 linear transformation  $T_A: \mathbb{F}^n \rightarrow \mathbb{F}^m$  定義為  $T_A(\mathbf{v}) = A\mathbf{v}$ ,  $\forall \mathbf{v} \in \mathbb{F}^n$ . 試說明  $\text{rank}(T_A)$  和  $\text{rank}(A)$  以及  $\text{nullity}(T_A)$  和  $\text{nullity}(A)$  之間的關係.

在 Question 6.10 中我們看到 matrix 的 rank 和 nullity 和 linear transformation 的 rank 和 nullity 關係密切. 對於 matrix 的 rank 和 nullity 我們有所謂的 Dimension Theorem (參見 Theorem 3.7.14), 對於 linear transformation 我們也有以下的定理.

**Theorem 6.2.9** (Dimension Theorem). 假設  $V, W$  皆為 vector space over  $\mathbb{F}$ , 其中  $V$  為 finite dimensional. 若  $T: V \rightarrow W$  為 linear transformation 則

$$\text{rank}(T) + \text{nullity}(T) = \dim(V).$$

**Proof.** 假設  $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n \in N(T)$ , 為  $T$  的 null space 的一組 basis. 因為  $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n$  在  $V$  中且為 linearly independent, 故由 Proposition 3.6.5 知存在  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m \in V$  使得  $\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m\}$  為  $V$  的一組 basis. 注意此時  $\text{nullity}(T) = \dim(N(T)) = n$  且  $\dim(V) = m + n$ . 我們要證明  $\{T(\mathbf{v}_1), \dots, T(\mathbf{v}_m)\}$  會是  $R(T)$  的一組 basis.

首先證明  $\text{Span}(T(\mathbf{v}_1), \dots, T(\mathbf{v}_m)) = R(T)$ . 由 Proposition 6.2.4, 我們知

$$R(T) = \text{Span}(T(\mathbf{u}_1), \dots, T(\mathbf{u}_n), T(\mathbf{v}_1), \dots, T(\mathbf{v}_m)).$$

然而  $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n \in N(T)$ , 亦即  $T(\mathbf{u}_1), \dots, T(\mathbf{u}_n)$  皆為  $W$  中的零向量, 故得

$$R(T) = \text{Span}(T(\mathbf{v}_1), \dots, T(\mathbf{v}_m)).$$

接下來我們證明  $\{T(\mathbf{v}_1), \dots, T(\mathbf{v}_m)\}$  為 linearly independent. 假設  $\{T(\mathbf{v}_1), \dots, T(\mathbf{v}_m)\}$  不是 linearly independent, 亦即存在  $c_1, \dots, c_m \in \mathbb{F}$  不全為 0 使得  $c_1 T(\mathbf{v}_1) + \dots + c_m T(\mathbf{v}_m) = \mathbf{0}$ . 此時由  $T$  為 linear transformation 知  $T(c_1 \mathbf{v}_1 + \dots + c_m \mathbf{v}_m) = \mathbf{0}$ , 因此得  $c_1 \mathbf{v}_1 + \dots + c_m \mathbf{v}_m \in N(T)$ . 然而  $\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n\}$  為  $N(T)$  的 basis, 故存在  $d_1, \dots, d_n \in \mathbb{F}$  使得  $c_1 \mathbf{v}_1 + \dots + c_m \mathbf{v}_m = d_1 \mathbf{u}_1 + \dots + d_n \mathbf{u}_n$ , 故得

$$d_1 \mathbf{u}_1 + \dots + d_n \mathbf{u}_n - c_1 \mathbf{v}_1 - \dots - c_m \mathbf{v}_m = \mathbf{0}.$$

然而  $\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m\}$  為 linearly independent, 故得  $d_1 = \dots = d_n = c_1 = \dots = c_m = 0$ . 此與  $c_1, \dots, c_m$  不全為 0 相矛盾, 故得證  $\{T(\mathbf{v}_1), \dots, T(\mathbf{v}_m)\}$  為 linearly independent.

既然  $\{T(\mathbf{v}_1), \dots, T(\mathbf{v}_m)\}$  是  $R(T)$  的一組 basis, 我們有  $\text{rank}(T) = \dim(R(T)) = m$ , 故得證  $\text{rank}(T) + \text{nullity}(T) = \dim(V)$ .  $\square$

前面提過對於一般的函數, 要探討是否為 onto 或是 one-to-one 並不容易. 而對於 linear transformation, 我們可以藉由求其 range 及 null space 這兩個 subspaces 來了解這些問題. 而 Dimension Theorem 告訴我們, 只要了解 range 及 null space 這兩個 subspaces 中其中一個, 就可以了解另一個了.

**Exercise 6.1.** 以下所定的函數是否為 linear transformation? 若是請證明; 若不是請舉反例.

- (1)  $T_1: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, (x, y, z) \mapsto (|x|, -z, y)$ .
- (2) 給定  $B \in M_n$ , 令  $T_2: M_n \rightarrow M_n, A \mapsto AB^2 + BA$ .
- (3) 給定  $B \in M_n$ , 令  $T_3: M_n \rightarrow M_n, A \mapsto AB + BA^2$ .

(4)  $P_n$  為次數小於  $n+1$  的多項式所成 vector space, 令  $T_4: P_n \rightarrow P_{n+1}$ ,

$$f(x) \mapsto f(0) + xf(x) + x^2 f'(x).$$

**Exercise 6.2.** 考慮函數  $T: M_2 \rightarrow M_2$ .

(1) 若已知  $T(A) = A^t, \forall A \in M_2$ , 證明  $T$  為 linear transformation.

(2) 若已知  $T$  為 linear transformation 且滿足

$$\begin{aligned} T\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; T\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}; \\ T\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\right) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; T\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

證明  $T(A) = A^t, \forall A \in M_2$ .

**Exercise 6.3.** 考慮  $\mathbb{R}^n$  為 standard inner product space. 已知  $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  滿足以下保距性質:

$$(i) T(\mathbf{0}) = \mathbf{0}; \quad (ii) \|T(\mathbf{v}) - T(\mathbf{w})\| = \|\mathbf{v} - \mathbf{w}\|.$$

(1) 證明  $\|T(\mathbf{v})\| = \|\mathbf{v}\|$  以及  $\langle T(\mathbf{v}), T(\mathbf{w}) \rangle = \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle, \forall \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$

(2) 考慮 standard basis  $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ . 若已知  $T(\mathbf{e}_i) = \mathbf{u}_i, \forall i = 1, \dots, n$ . 證明

$$T(c_1, \dots, c_n) = \sum_{i=1}^n c_i \mathbf{u}_i.$$

(3) 證明  $T$  為 linear transformation.

**Exercise 6.4.**  $\mathbb{R}^2$  上的一維子空間  $L$  皆可由一個非零向量所展成, 因此可視為一個通過原點的直線  $L = \{(x, y) \mid ax + by = 0\}$ .

(1) 設  $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  定義為  $T(x, y) = (x+y, x-y)$  試利用  $a, b$  表達  $T(L)$  和  $T^{-1}(L)$  為怎樣的子空間。

(2) 設  $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  定義為  $T(x, y) = (x+y, x+y)$  試利用  $a, b$  表達  $T(L)$  和  $T^{-1}(L)$  為怎樣的子空間。

**Exercise 6.5.** 試找到以下 linear transformations 的 kernel 和 image 的 basis.

(1)  $T_1: \mathbb{R}^5 \rightarrow \mathbb{R}^4$ , 定義為

$$T_1(a, b, c, d, e) = (a - c + 3d - e, a + 2d - e, 2a - c + 5d - e, -c + d).$$

(2)  $T_2: P_2(\mathbb{R}) \rightarrow P_3(\mathbb{R})$ , 定義為  $T_2(f(x)) = x^2 f'(x)$ .

**Exercise 6.6.** 設  $T: V \rightarrow W$  為 linear transformation 且  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n \in V$ .

(1) 已知  $T(\mathbf{v}_1), \dots, T(\mathbf{v}_n) \in W$  為 linearly independent, 證明  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$  也是 linearly independent。

(2) 假設  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$  為 linearly independent。證明若  $\text{Span}(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n) \cap \mathcal{N}(T) = \{\mathbf{0}_V\}$  則  $T(\mathbf{v}_1), \dots, T(\mathbf{v}_n) \in W$  為 linearly independent。