6.3. Matrix Representation

給定一個 matrix $A \in M_{m\times n}(\mathbb{F})$, 前面我們已知可以定義出一個 linear transformation $T : \mathbb{F}^n \to \mathbb{F}^m$, 其定義為 $T(\mathbf{v}) = A\mathbf{v}$, $\forall \mathbf{v} \in \mathbb{F}^n$. 在這一節中, 我們要說明所有的 $\mathbb{F}^n$ 到 $\mathbb{F}^m$ 的 linear transformations 都可以寫成這樣的形式, 並將此概念推廣到一般 linear spaces 之間的 linear transformation. 也就是說, 我們將 linear transformation 和 matrix 相連結並推得一些重要的性質.

6.3.1. $\mathbb{F}^n$ 到 $\mathbb{F}^m$ 的 linear transformations. 前面 Theorem 6.1.8 告訴我們給定一個 linear transformation, 只要知道此 linear transformation 將一組 $\mathbb{F}^n$ 的 basis 對應到哪些向量, 就可以唯一確定這一個 linear transformation. 在 $\mathbb{F}^n$ 中, 我們有一個最簡單的 basis, 即 standard basis $\{\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_n\}$. 若 $T : \mathbb{F}^n \to \mathbb{F}^m$ 是一個 linear transformation, 由前面所述, 我們僅要知道 $T(\mathbf{e}_1),\ldots,T(\mathbf{e}_n)$ 是哪些 $\mathbb{F}^m$ 的 vectors, 就可以知道任意 $\mathbf{v} \in \mathbb{F}^n$, $T(\mathbf{v})$ 為何了.

事實上對於每一個 $\mathbf{v} \in \mathbb{F}^n$, 都可以找到 $c_1,\ldots,c_n \in \mathbb{F}$ 使得 $\mathbf{v} = c_1\mathbf{e}_1 + \cdots + c_n\mathbf{e}_n$, 也就是說此時 $\mathbf{v}$ 的坐標表示法為 $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}$. 因此由 T 為 linear, 得 $T(\mathbf{v}) = T(c_1\mathbf{e}_1 + \cdots + c_n\mathbf{e}_n) = c_1T(\mathbf{e}_1) + \cdots + c_nT(\mathbf{e}_n)$. 現若考慮 $m\times n$ matrix A, 其中 A 的 i-th column 為 $T(\mathbf{e}_i)$, 則

$$A\mathbf{v} = \begin{bmatrix} | & | & & | \\ T(\mathbf{e}_1) & T(\mathbf{e}_2) & \cdots & T(\mathbf{e}_n) \\ | & | & & | \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} = c_1T(\mathbf{e}_1) + \cdots + c_nT(\mathbf{e}_n) = T(\mathbf{v}).$$

也就是說對任意 $\mathbf{v} \in \mathbb{F}^n$, 皆有 $T(\mathbf{v}) = A\mathbf{v}$. 因此 T 就等同於將 $\mathbf{v}$ 左邊乘上 A 這一個矩陣這樣的 linear transformation. 我們有以下這一個重要的定理.

Theorem 6.3.1. 給定一個 $\mathbb{F}^n$ 到 $\mathbb{F}^m$ 的 *function* T. 則 T 為 *linear transformation* 若且唯若存在一個 $m\times n$ *matrix* A 使得 $T(\mathbf{v}) = A\mathbf{v}$, $\forall \mathbf{v} \in \mathbb{F}^n$. 此 $m\times n$ *matrix* A 是唯一的, 事實上對任意 $i = 1,\ldots,n$, A 的 *i-th column* 為 $T(\mathbf{e}_i)$, 其中 $\{\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_n\}$ 為 $\mathbb{F}^n$ 的 *standard basis.*

Proof. 由 Lemma 6.1.5 我們知道, 若 $T(\mathbf{v}) = A\mathbf{v}$, $\forall \mathbf{v} \in \mathbb{F}^n$, 則 T 為 linear transformation. 反之, 若 $T : \mathbb{F}^n \to \mathbb{F}^m$ 為 linear transformation, 如前面所討論的, 我們可以考慮 A 為 i-th column 為 $T(\mathbf{e}_i)$ 的 $m\times n$ matrix, 則由矩陣乘法性質知 $T(\mathbf{v}) = A\mathbf{v}$, $\forall \mathbf{v} \in \mathbb{F}^n$.

現若 B 為 $m\times n$ matrix 亦滿足 $T(\mathbf{v}) = B\mathbf{v}$, 依矩陣乘法定義知對任意 $i = 1,\ldots,n$, $B\mathbf{e}_i$ 為 B 的 i-th column. 但由假設 $B\mathbf{e}_i = T(\mathbf{e}_i)$, 亦即 B 的 i-th column 為 $T(\mathbf{e}_i)$. 因此 B 的所有 column 皆與前述 A 的 column 相一致, 證得唯一性. $\square$

簡單來說 Theorem 6.3.1 告訴我們從 $\mathbb{F}^n$ 到 $\mathbb{F}^m$ 的 linear transformations 和 $m\times n$ matrices 之間有一個一對一的對應關係 (注意矩陣階數與定義域, 對應域之間的關係). 由於一個 linear transformation 和其對應的 $m\times n$ matrix 關係特別密切, 我們有以下的定義.

Definition 6.3.2. 假設 $T:\mathbb{F}^n\to\mathbb{F}^m$ 為 linear transformation 且 $\{\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_n\}$ 為 $\mathbb{F}^n$ 的 standard basis. 則對於 $i=1,\ldots,n$, 其 i-th column 為 $T(\mathbf{e}_i)$ 的 $m\times n$ matrix 稱為 T 的 *standard matrix representation.*

由於 T 的 standard matrix representation 是唯一的且和 T 有關, 以後我們都用 $[T]$ 來表示 T 的 standard matrix representation. 也就是說對任意 $\mathbf{v}\in\mathbb{F}^n$, 我們有 $T(\mathbf{v})=[T]\mathbf{v}$.

Example 6.3.3. 我們探討 Example 6.2.5 中的 linear transformation 其 standard matrix representation.

(1) 考慮 $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$ 定義為 $T(\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix})=\begin{bmatrix}x_1+x_2\\x_1-x_3\end{bmatrix}$. 由於

$$T(\mathbf{e}_1)=T(\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix})=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix},T(\mathbf{e}_2)=T(\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix})=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix},T(\mathbf{e}_3)=T(\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix})=\begin{bmatrix}0\\-1\end{bmatrix},$$

故得

$$[T]=\begin{bmatrix}| & | & |\\ T(\mathbf{e}_1) & T(\mathbf{e}_2) & T(\mathbf{e}_3)\\ | & | & |\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&1&0\\1&0&-1\end{bmatrix}.$$

事實上我們有

$$[T]\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&1&0\\1&0&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_1+x_2\\x_1-x_3\end{bmatrix}=T(\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}).$$

(2) 考慮 $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$ 定義為 $T(\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix})=\begin{bmatrix}x_1\\x_1+x_2\\x_1-x_2\end{bmatrix}$. 由於

$$T(\mathbf{e}_1)=T(\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix})=\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix},T(\mathbf{e}_2)=T(\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix})=\begin{bmatrix}0\\1\\-1\end{bmatrix},$$

故得

$$[T]=\begin{bmatrix}| & |\\ T(\mathbf{e}_1) & T(\mathbf{e}_2)\\ | & |\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0\\1&1\\1&-1\end{bmatrix}.$$

事實上我們有

$$[T]\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0\\1&1\\1&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_1\\x_1+x_2\\x_1-x_2\end{bmatrix}=T(\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}).$$

有了 standard matrix representation, 我們就可以利用以下的定理幫助我們找出它的的 range 和 null space.

Proposition 6.3.4. 假設 $T:\mathbb{F}^n\to\mathbb{F}^m$ 為 *linear transformation* 且令 $[T]\in M_{m\times n}(\mathbb{F})$ 為其 *standard matrix representation.* 則 T 的 *range* 等於 $[T]$ 的 *column space,* 而 T 的 *null space* 等於 $[T]$ 的 *null space.*

Proof. 由於 $\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_n$ 為 $\mathbb{F}^n$ 的一組 basis, 由 Proposition 6.2.4 我們知 T 的 range, 即 $\mathsf{R}(T)=\mathrm{Span}(T(\mathbf{e}_1),\ldots,T(\mathbf{e}_n))$. 然而 $T(\mathbf{e}_1),\ldots,T(\mathbf{e}_n)$ 剛好就是 $[T]$ 的 n 個 column, 故由定義 $\mathrm{Span}(T(\mathbf{e}_1),\ldots,T(\mathbf{e}_n))$ 就是 $[T]$ 的 column space. 得證 T 的 range 就是 $[T]$ 的 column space.

另一方面, 若 $\mathbf{v}\in\mathsf{N}(T)$, 表示 $T(\mathbf{v})=\mathbf{0}$. 然而依 standard matrix representation 之定義 $T(\mathbf{v})=[T]\mathbf{v}$, 故得 $[T]\mathbf{v}=\mathbf{0}$, 亦即 $\mathbf{v}$ 屬於 $[T]$ 的 null space. 得證 $\mathsf{N}(T)$ 包含於 $[T]$ 的 null space. 反之, 若 $\mathbf{v}$ 屬於 $[T]$ 的 null space, 表示 $[T]\mathbf{v}=\mathbf{0}$, 亦即 $T(\mathbf{v})=\mathbf{0}$, 得證 $\mathbf{v}\in\mathsf{N}(T)$. 證明了 $[T]$ 的 null space 包含於 $\mathsf{N}(T)$, 因此 T 的 null space 等於 $[T]$ 的 null space. □

回顧一個矩陣 A 的 column space 的維度, 我們稱為 A 的 rank, 用 $\mathrm{rank}(A)$ 來表示. 而 A 的 null space 的維度稱為 A 的 nullity, 用 $\mathrm{nullity}(A)$ 來表示 (參見 Definition 3.7.13). 由 Proposition 6.3.4, 我們知道 T 的 range 的維度等於 $\mathrm{rank}([T])$, 而 T 的 null space 的維度等於 $\mathrm{nullity}([T])$, 也就是說我們有以下的結果.

Corollary 6.3.5. 假設 $T:\mathbb{F}^n\to\mathbb{F}^m$ 為 *linear transformation* 且令 $[T]\in M_{m\times n}(\mathbb{F})$ 為其 *standard matrix representation.* 則

$$\mathrm{rank}(T)=\dim(\mathsf{R}(T))=\mathrm{rank}([T])\quad\text{and}\quad \mathrm{nullity}(T)=\dim(\mathsf{N}(T))=\mathrm{nullity}([T]).$$

因為這個原因一般我們也稱 T 的 range 的維度為 T 的 *rank*, 而 T 的 null space 的維度稱為 T 的 *nullity*. 這更進一步的強調了 linear transformation 以及 matrix 之間的關係. 例如我們也很容易利用 linear transformation 的 Dimension Theorem (Theorem 6.2.9) 推得矩陣的 Dimension Theorem (Theorem 3.7.14).

Example 6.3.6. 我們利用 Example 6.3.3 中的 linear transformation 及其 standard matrix representation 探討其 range 和 null space.

(1) 考慮 $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$ 定義為 $T(\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix})=\begin{bmatrix}x_1+x_2\\x_1-x_3\end{bmatrix}$, 以及其 standard matrix representation $[T]=\begin{bmatrix}1&1&0\\1&0&-1\end{bmatrix}$. 由於 $[T]$ 的 column space 為 $\mathrm{Span}(\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\-1\end{bmatrix})=\mathbb{R}^2$. 因此由 Proposition 6.3.4 我們有 $\mathsf{R}(T)=\mathbb{R}^2$ (此與 Example 6.2.5(1) 一致). 另一方面, $[T]$ 的 null space 為聯立方程組 $[T]\mathbf{x}=\mathbf{0}$, 即

$$\left\{\begin{array}{rrrcl}x_1&+x_2&&=&0\\x_1&&-x_3&=&0\end{array}\right.\quad\sim\quad\left\{\begin{array}{rrrcl}x_1&+x_2&&=&0\\&-x_2&-x_3&=&0\end{array}\right.$$

的解集合. 因此由 Proposition 6.3.4 我們有 $\mathsf{N}(T)=\mathrm{Span}(\begin{bmatrix}1\\-1\\1\end{bmatrix})$ (此與 Example 6.2.7(1) 一致).

(2) 考慮 $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$ 定義為 $T(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix})=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_1+x_2 \\ x_1-x_2 \end{bmatrix}$, 以及其 standard matrix representation $[T]=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$. 由於 $[T]$ 的 column space 為 $\mathrm{Span}(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix},\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix})$. 因此由 Proposition 6.3.4 我們有 $\mathsf{R}(T)=\mathrm{Span}(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix},\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix})$ (此與 Example 6.2.5(2) 一致). 另一方面, $[T]$ 的 null space 為聯立方程組 $[T]\mathbf{x}=\mathbf{0}$, 即

$$\left\{\begin{array}{rrcl} x_1 & & = & 0 \\ x_1 & +x_2 & = & 0 \\ x_1 & -x_2 & = & 0 \end{array}\right. \sim \left\{\begin{array}{rrcl} x_1 & & = & 0 \\ & x_2 & = & 0 \end{array}\right.$$

的解集合. 因此由 Proposition 6.3.4 我們有 $\mathsf{N}(T)=\{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}\}=\{\mathbf{0}\}$ (此與 Example 6.2.7(2) 一致).

當 T_1,T_2 皆為 $\mathbb{F}^n$ 到 $\mathbb{F}^m$ 的 linear transformation 時, 對任意 $c_1,c_2\in\mathbb{F}$, 我們可以利用它們得到一個新的 $\mathbb{F}^n$ 到 $\mathbb{F}^m$ 的 linear transformation $c_1T_1+c_2T_2$ (參見 Proposition 6.1.6). 我們自然會想知道 $c_1T_1+c_2T_2$ 的 standard matrix representation 和 T_1,T_2 的 standard matrix representation 是否有關. 另外, 若 T 為 $\mathbb{F}^m$ 到 $\mathbb{F}^k$ 的 linear transformation, 我們可得合成函數 $T\circ T_1$ 為 $\mathbb{F}^n$ 到 $\mathbb{F}^k$ 的 linear transformation (參見 Proposition 6.1.7). 同樣的, 我們要探討 $T\circ T_1$ 的 standard matrix representation 和 T_1,T 的 standard matrix representation 是否有關.

Lemma 6.3.7. 設 T_1,T_2 為 $\mathbb{F}^n$ 到 $\mathbb{F}^m$ 的 *linear transformations,* 而 T 為 $\mathbb{F}^m$ 到 $\mathbb{F}^k$ 的 *linear transformation.* 令 $[T_1],[T_2]$ 以及 $[T]$ 分別為 T_1,T_2 和 T 的 *standard matrix representation.*

(1) 對任意 $c_1,c_2\in\mathbb{F}$, 皆有 $c_1T_1+c_2T_2:\mathbb{F}^n\to\mathbb{F}^m$ 的 *standard matrix representation* 為 $c_1[T_1]+c_2[T_2]$, 亦即

$$[c_1T_1+c_2T_2]=c_1[T_1]+c_2[T_2].$$

(2) $T\circ T_1:\mathbb{F}^n\to\mathbb{F}^k$ 的 *standard matrix representation* 為 $[T][T_1]$, 亦即

$$[T\circ T_1]=[T][T_1].$$

Proof. (1) 依定義對任意 $\mathbf{v}\in\mathbb{F}^n$, 我們有 $(c_1T_1+c_2T_2)(\mathbf{v})=c_1T_1(\mathbf{v})+c_2T_2(\mathbf{v})$. 又依 standard matrix representation 的定義 $T_1(\mathbf{v})=[T_1]\mathbf{v},T_2(\mathbf{v})=[T_2]\mathbf{v}$, 故依矩陣乘法的分配律得

$$(c_1T_1+c_2T_2)(\mathbf{v})=c_1[T_1]\mathbf{v}+c_2[T_2]\mathbf{v}=(c_1[T_1]+c_2[T_2])\mathbf{v}.$$

換言之, $c_1[T_1]+c_2[T_2]$ 是一個 $m\times n$ matrix 且滿足 $c_1T_1+c_2T_2:\mathbb{F}^n\to\mathbb{F}^m$ 的 standard matrix representation 之要求, 故由 standard matrix representation 的唯一性 (Theorem 6.3.1) 知 $[c_1T_1+c_2T_2]=c_1[T_1]+c_2[T_2]$.

(2) 依定義對任意 $\mathbf{v} \in \mathbb{F}^n$, 我們有 $(T \circ T_1)(\mathbf{v}) = T(T_1(\mathbf{v}))$. 又依 standard matrix representation 的定義 $T_1(\mathbf{v}) = [T_1]\mathbf{v}$, 故得 $(T \circ T_1)(\mathbf{v}) = T([T_1]\mathbf{v})$. 又依定義, 對任意 $\mathbf{w} \in \mathbb{F}^m$ 皆有 $T(\mathbf{w}) = [T]\mathbf{w}$, 故得 $(T \circ T_1)(\mathbf{v}) = T([T_1]\mathbf{v}) = [T]([T_1]\mathbf{v})$. 再依矩陣乘法的結合律得 $[T]([T_1]\mathbf{v}) = ([T][T_1])\mathbf{v}$. 換言之, $[T][T_1]$ 是一個 $k \times n$ matrix 且滿足 $T \circ T_1 : \mathbb{F}^n \to \mathbb{F}^k$ 的 standard matrix representation 之要求 $(T \circ T_1)(\mathbf{v}) = ([T][T_1])\mathbf{v}$, 故由 standard matrix representation 的唯一性 (Theorem 6.3.1) 知 $[T \circ T_1] = [T][T_1]$. □

Example 6.3.8. 我們利用 Example 6.3.3 中的 linear transformations 及其 standard matrix representations 探討它們的合成函數.

考慮 $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ 定義為 $T(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ x_1 - x_3 \end{bmatrix}$. 我們知 T 的 standard matrix representation 為 $[T] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$. 另外考慮 $T' : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ 定義為 $T'(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_1 + x_2 \\ x_1 - x_2 \end{bmatrix}$. 我們知 T' 的 standard matrix representation 為 $[T'] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$. 依合成函數定義 $T' \circ T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ 滿足

$$(T' \circ T)(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}) = T'(\begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ x_1 - x_3 \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ (x_1 + x_2) + (x_1 - x_3) \\ (x_1 + x_2) - (x_1 - x_3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 \\ x_2 + x_3 \end{bmatrix}.$$

依此結果, 我們得 $T' \circ T$ 的 standard matrix representation 為 $[T' \circ T] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$. 另一方面, 考慮矩陣乘法, 我們有 $[T'][T] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$. 的確得到 $[T' \circ T] = [T'][T]$.

我們利用 matrix 來幫助我們了解 linear transformation. 反過來, 我們也可以利用 linear transformation 來幫助我們了解 matrix 的性質. 例如當 $T : \mathbb{F}^n \to \mathbb{F}^m$, $T' : \mathbb{F}^m \to \mathbb{F}^k$ 為 linear transformations. 由於 T 的 range 是 $\mathbb{F}^m$ 的 subspace, 即 $\mathsf{R}(T) = T(\mathbb{R}^n) \subseteq \mathbb{R}^m$, 我們有 $(T' \circ T)(\mathbb{R}^n) = T'(T(\mathbb{R}^n)) \subseteq T'(\mathbb{R}^m)$. 也就是說 $T' \circ T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ 這一個 linear transformation 的 range 是包含於 T' 的 range, 即 $\mathsf{R}(T' \circ T) \subseteq \mathsf{R}(T')$. 利用 subspace 之間 dimension 的關係 (Proposition 3.6.9(4)), 我們得 $\mathrm{rank}(T' \circ T) \leq \mathrm{rank}(T')$. 因此當 $A \in M_{m \times n}(\mathbb{F})$, $B \in M_{k \times m}(\mathbb{F})$, 我們可以推得 $\mathrm{Col}(BA) \subseteq \mathrm{Col}(B)$ 且 $\mathrm{rank}(BA) \leq \mathrm{rank}(B)$ (Proposition 3.7.16(1)).

Question 6.11. 假設 $T : \mathbb{F}^n \to \mathbb{F}^m$, $T' : \mathbb{F}^m \to \mathbb{F}^k$ 為 *linear transformations.* 證明 $\mathsf{N}(T) \subseteq \mathsf{N}(T' \circ T)$, 並依此證明若 $A \in M_{m \times n}(\mathbb{F})$, $B \in M_{k \times m}(\mathbb{F})$, 則 $\mathsf{N}(A) \subseteq \mathsf{N}(BA)$ 且 $\mathrm{rank}(BA) \leq \mathrm{rank}(A)$.

6.3.2. Coordinatization. 我們將介紹一種很重要的 linear transformation, 就是將一個 vector space 裡的元素坐標化. 利用坐標化我們可以將抽象的 vector space 的問題, 化成具體的 $\mathbb{F}^n$ 空間的問題處理.

假設 V 是 finite dimensional vector space, 選定 V 的一組 basis, 我們可以將此組 basis 裡的元素排序, 並固定這個順序不變, 那麼這樣的一組有順序的 basis, 我們稱之為 *ordered basis* (有序基底). 這裡要特別強調, 即使 basis 裡的元素相同但排序不同, 我們也視為相異的 ordered basis. 所以一般在談論 ordered basis 時, 我們會用 $(\mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_n)$ 來表示, 以強調其順序. 舉例來說 $\left(\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\right)$ 和 $\left(\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\right)$ 就是 $\mathbb{R}^2$ 中兩組不同的 ordered basis.

有時為了方便起見, 給了一組 ordered basis 後, 我們會用一個符號來表示這一組 ordered basis. 例如給定 $\beta=(\mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_n)$ 為 V 的一組 ordered basis, 我們就會 β 來表示這一組 ordered basis $(\mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_n)$. 對於 $\mathbb{F}^n$ 的 standard basis, 我們通常用 ε 來表示 $(\mathbf{e}_1,\dots,\mathbf{e}_n)$ 這一組 ordered basis.

有了 vector space V 的一組 ordered basis $\beta=(\mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_n)$ 後, 我們就可以將 V 中的元素 "坐標化" (*coordinatization*). 意思就是對任意 $\mathbf{v}\in V$, 我們利用 β 這一組 ordered basis 將 $\mathbf{v}$ 寫成 $\mathbf{v}=c_1\mathbf{v}_1+\cdots+c_n\mathbf{v}_n$ 後, $\begin{bmatrix}c_1\\ \vdots\\ c_n\end{bmatrix}$ 就是利用 β 將 $\mathbf{v}$ 坐標化後所得的坐標表示法. 為了方便, 我們就用 $[\mathbf{v}]_\beta$ 來表示利用 β 將 $\mathbf{v}$ 坐標化後所得的坐標. 坐標化的好處是, 我們可以將 $[\mathbf{v}]_\beta$ 看成是 $\mathbb{F}^n$ 中的一個向量. 這樣我們就可以將較抽象的 vector space 中的元素, 看成是 $\mathbb{F}^n$ 中的向量來處理.

Example 6.3.9. 我們看看前面提過的幾個 vector space 坐標化的情形.

(A) 考慮 $M_{2\times2}(\mathbb{F})$ 及其 ordered basis

$$\varepsilon=\left(\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}\right)$$

(通常我們稱這一組 basis 為 $M_{2\times2}(\mathbb{F})$ 的 standard basis). 對於任意 $M_{2\times2}(\mathbb{F})$ 中的元素 $\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}$, 由於

$$\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}=a\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}+b\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}+c\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix}+d\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix},$$

我們得 $\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}$ 利用 ε 所得的坐標表示法為

$$\left[\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}\right]_\varepsilon=\begin{bmatrix}a\\b\\c\\d\end{bmatrix}.$$

例如在 $M_{2\times2}(\mathbb{R})$, 我們有

$$\left[\begin{bmatrix}1&-2\\-3&4\end{bmatrix}\right]_\varepsilon=\begin{bmatrix}1\\-2\\-3\\4\end{bmatrix}.$$

(B) 在 $P_2(\mathbb{F})$ 中通常我們會稱 $1,x,x^2$ 這組 basis 為 standard basis. 考慮 $\varepsilon=(1,x,x^2)$ 這組 ordered basis. 很容易看出在 $P_2(\mathbb{R})$ 中, $2x^2-3x+4$ 用 ε 所得的坐標為 $\begin{bmatrix}4\\-3\\2\end{bmatrix}$, 所以我們有

$$[2x^2-3x+4]_\varepsilon=\begin{bmatrix}4\\-3\\2\end{bmatrix}.$$

我們也可考慮 ordered basis $\beta=(p_1(x),p_2(x),p_3(x))$ 其中

$$p_1(x)=-(x-1)(x+1),\quad p_2(x)=(1/2)x(x+1)\quad\text{and}\quad p_3(x)=(1/2)x(x-1)$$

. 由於

$$p_1(0)=1,p_1(1)=p_1(-1)=0;\,p_2(1)=1,p_2(0)=p_2(-1)=0;\,p_3(-1)=1,p_3(0)=p_3(1)=0,$$

若 $2x^2-3x+4=c_1p_1(x)+c_2p_2(x)+c_3p_3(x)$, 則分別代 $x=0,1,-1$, 可得 $c_1=4,c_2=3,c_3=9$. 故

$$[2x^2-3x+4]_\beta=\begin{bmatrix}4\\3\\9\end{bmatrix}.$$

(C) 我們也可將 $\mathbb{F}^n$ 中的向量用不同的 ordered basis 坐標化. 例如在 $\mathbb{R}^3$ 中考慮 ordered basis $\beta=(\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix})$. 若要求向量 $\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}$ 以 β 為 ordered basis 的坐標表示, 我們要求出 $c_1,c_2,c_3\in\mathbb{R}$ 滿足

$$\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}=c_1\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}+c_2\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}+c_3\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&1\\1&1&0\\1&1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}c_1\\c_2\\c_3\end{bmatrix}.$$

解聯立方程組得, $c_1=0,c_2=2,c_3=1$, 故得

$$\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}_\beta=\begin{bmatrix}0\\2\\1\end{bmatrix}.$$

要注意這裡我們有 $\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}_\varepsilon=\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}$, 其中 ε 為 $\mathbb{R}^3$ 的 standard ordered basis $(\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3)$. 這是因為我們原來就是用 standard ordered basis ε 來將所有 $\mathbb{R}^3$ 的向量的坐標化.

給定 V 的一組 ordered basis $\beta=(\mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_n)$, 將 V 中的元素利用 β 坐標化, 其實就定出了一個從 V 到 $\mathbb{F}^n$ 的函數 $T_\beta:V\to\mathbb{F}^n$, 其中對任意 $\mathbf{v}\in V$, 我們有 $T_\beta(\mathbf{v})=[\mathbf{v}]_\beta$. 為什麼這是一個函數呢? 因為 $\mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_n$ 為 V 的一組 basis, 所以由 $\{\mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_n\}$ 是 V 的 spanning set, 可得任意的 $\mathbf{v}\in V$ 確實都存在 $c_1,\dots,c_n\in\mathbb{F}$ 使得 $\mathbf{v}=c_1\mathbf{v}_1+\cdots+c_n\mathbf{v}_n$. 所以 T_β 確實可以將每個定義域中的元素 $\mathbf{v}$ 對應到對應域 $\mathbb{F}^n$ 中的向量 $\begin{bmatrix}c_1\\\vdots\\c_n\end{bmatrix}$. 而且這個對應關係是 well-defined, 也

就是說不會有將同一個 $\mathbf{v}$ 對應到 $\mathbb{F}^n$ 中兩個不同向量的情況. 這是因為 $\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_n$ 為 linearly independent, 所以每個 $\mathbf{v}\in V$, 僅有一組 $c_1,\ldots,c_n\in\mathbb{F}$ 會使得 $\mathbf{v}=c_1\mathbf{v}_1+\cdots+c_n\mathbf{v}_n$.

既然 $T_\beta:V\to\mathbb{F}^n$ 是一個 well-defined 的函數, 那它會是 linear transformation 嗎? 答案是肯定的. 考慮 $\mathbf{v},\mathbf{w}\in V$ 且假設 $\mathbf{v}=c_1\mathbf{v}_1+\cdots+c_n\mathbf{v}_n$, $\mathbf{w}=d_1\mathbf{v}_1+\cdots+d_n\mathbf{v}_n$, 其中 $c_1,\ldots,c_n$ 與 $d_1,\ldots,d_n$ 皆屬於 $\mathbb{F}$. 依定義我們有

$$T_\beta(\mathbf{v})=[\mathbf{v}]_\beta=\begin{bmatrix}c_1\\ \vdots\\ c_n\end{bmatrix}\quad\text{and}\quad T_\beta(\mathbf{w})=[\mathbf{w}]_\beta=\begin{bmatrix}d_1\\ \vdots\\ d_n\end{bmatrix}.$$

對於任意 $r\in\mathbb{F}$, 由於

$$\mathbf{v}+r\mathbf{w}=(c_1\mathbf{v}_1+\cdots+c_n\mathbf{v}_n)+r(d_1\mathbf{v}_1+\cdots+d_n\mathbf{v}_n)=(c_1+rd_1)\mathbf{v}_1+\cdots+(c_n+rd_n)\mathbf{v}_n,$$

我們有

$$T_\beta(\mathbf{v}+r\mathbf{w})=[\mathbf{v}+r\mathbf{w}]_\beta=\begin{bmatrix}c_1+rd_1\\ \vdots\\ c_n+rd_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}c_1\\ \vdots\\ c_n\end{bmatrix}+r\begin{bmatrix}d_1\\ \vdots\\ d_n\end{bmatrix}=T_\beta(\mathbf{v})+rT_\beta(\mathbf{w}).$$

得證 $T_\beta:V\to\mathbb{F}^n$ 為 linear transformation.

$T_\beta:V\to\mathbb{R}^n$ 不只是 linear transformation, 事實上 $T_\beta:V\to\mathbb{R}^n$ 是 one-to-one 且 onto. 要檢查 T_β 為 one-to-one, 我們僅要檢查 $\mathsf{N}(T_\beta)=\{\mathbf{0}\}$ 即可 (參見 Proposition 6.2.6). 然而若 $\mathbf{v}\in\mathsf{N}(T_\beta)$, 表示 $\mathbf{v}$ 用 β 的坐標表示法是 $\mathbb{F}^n$ 中的零向量, 亦即 $\mathbf{v}=c_1\mathbf{v}_1+\cdots+c_n\mathbf{v}_n$, 其中 $c_1=\cdots=c_n=0$. 很自然的, 這表示 $\mathbf{v}=\mathbf{0}$, 故知 $\mathsf{N}(T_\beta)=\{\mathbf{0}\}$. 要檢查 T_β 為 onto, 我們可以利用 $T_\beta(\mathbf{v}_i)=\mathbf{e}_i$, $\forall i=1,\ldots,n$, 故得證 $\mathsf{R}(T_\beta)=\mathrm{Span}(T_\beta(\mathbf{v}_1),\ldots,T_\beta(\mathbf{v}_n))=\mathrm{Span}(\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_n)=\mathbb{F}^n$ (參見 Proposition 6.2.4), 即 T_β 為 onto. 我們證得了以下的定理.

Theorem 6.3.10. 假設 V 為 *vector space over* $\mathbb{F}$, $\dim(V)=n$ 且 β 為 V 的一組 *ordered basis*. 考慮 $T_\beta:V\to\mathbb{F}^n$ 定義為 $T_\beta(\mathbf{v})=[\mathbf{v}]_\beta$, $\forall\mathbf{v}\in V$. 則 T_β 為 *linear transformation* 且是 *one-to-one* 以及 *onto*.

一般來說當一個 linear transformation $T:V\to W$ 是 one-to-one 且 onto 時, 為了方便以及強調其特殊性, 我們會稱 T 為一個 *isomorphism*. 知道 $T_\beta:V\to\mathbb{F}^n$ 為 isomorphism 的好處就是, 以後我們要探討 V 中元素的性質, 我們可以利用 T_β, 將問題轉換成大家熟悉的 $\mathbb{F}^n$ 中的向量的性質. 例如我們要判斷 V 中的元素 $\mathbf{w}_1,\ldots,\mathbf{w}_k$ 是否為 linearly independent. 我們可以先找到一組 V 的 ordered basis β, 然後考慮 $[\mathbf{w}_1]_\beta,\ldots,[\mathbf{w}_k]_\beta$, 這一組 $\mathbb{F}^n$ 中的向量. 利用我們熟悉的判斷 $\mathbb{F}^n$ 中向量是否為 linearly independent 的方法判斷 $[\mathbf{w}_1]_\beta,\ldots,[\mathbf{w}_k]_\beta$ 是否為 linearly independent. 由於對於 $i=1,\ldots,k$, $[\mathbf{w}_i]_\beta=T_\beta(\mathbf{w}_i)$, 因此由 T_β 為 isomorphism 以後我們會知道 $\mathbf{w}_1,\ldots,\mathbf{w}_k$ 為 linearly independent 若且唯若 $[\mathbf{w}_1]_\beta,\ldots,[\mathbf{w}_k]_\beta$ 為 linearly independent (參見 Proposition 6.4.4). 因此我們可以由 $[\mathbf{w}_1]_\beta,\ldots,[\mathbf{w}_k]_\beta$ 是否為 linearly independent, 來決定 $\mathbf{w}_1,\ldots,\mathbf{w}_k$ 是否為 linearly independent. 我們看以下的例子.

Example 6.3.11. 我們看利用坐標化來處理一般 vector space 是否 linear independent 的問題.

(A) 考慮 $P_2(\mathbb{R})$ 中 3 個非零多項式 $f_2(x), f_1(x), f_0(x)$, 其次數分別為為 2, 1, 0 的多項式. 假設 $f_2(x) = ax^2 + bx + c$, $f_1(x) = dx + e$, $f_0(x) = r$ 其中 a, d, r 皆不等於 0. 我們利用 $P_2(\mathbb{R})$ 的 standard ordered basis $\varepsilon = (1, x, x^2)$, 可得

$$[f_2(x)]_\varepsilon = \begin{bmatrix} c \\ b \\ a \end{bmatrix}, \quad [f_1(x)]_\varepsilon = \begin{bmatrix} e \\ d \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{and} \quad [f_0(x)]_\varepsilon = \begin{bmatrix} r \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

由於 a, d, r 皆不等於 0, 很容易看出矩陣

$$\begin{bmatrix} c & e & r \\ b & d & 0 \\ a & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

的 rank 為 3, 亦即 $[f_2(x)]_\varepsilon, [f_1(x)]_\varepsilon, [f_0(x)]_\varepsilon$ 為 linearly independet. 因此得證 $f_2(x)$, $f_1(x)$, $f_0(x)$ 為 linearly independent. 再由 $\dim(P_2(\mathbb{R})) = 3$, 得證 $f_0(x), f_1(x), f_2(x)$ 為 $P_2(\mathbb{R})$ 的一組 basis.

我們可以將這個結果推廣到 $P_n(\mathbb{R})$. 也就是說考慮 $P_n(\mathbb{R})$ 中 $n+1$ 個非零多項式 $f_0(x), \ldots, f_n(x)$, 其中對於 $i = 0, \ldots, n$, $f_i(x)$ 是次數為 i 的多項式. 利用對 standard ordered basis $\varepsilon = (1, x, \ldots, x^n)$ 坐標化, 我們可得 $f_0(x), \ldots, f_n(x)$ 為 $P_n(\mathbb{R})$ 的一組 basis.

(B) 假設 V 為 vector space over $\mathbb{R}$, 且 $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4 \in V$ 為 linearly independent. 令

$$\begin{array}{rrrrr} \mathbf{w}_1 = & \mathbf{v}_1 & -\mathbf{v}_2 & +2\mathbf{v}_3 & +\mathbf{v}_4 \\ \mathbf{w}_2 = & 2\mathbf{v}_1 & -2\mathbf{v}_2 & +4\mathbf{v}_3 & +2\mathbf{v}_4 \\ \mathbf{w}_3 = & \mathbf{v}_1 & & +\mathbf{v}_3 & +\mathbf{v}_4 \\ \mathbf{w}_4 = & & \mathbf{v}_2 & & +\mathbf{v}_4 \\ \mathbf{w}_5 = & -\mathbf{v}_1 & +\mathbf{v}_2 & -\mathbf{v}_3 & \end{array}.$$

我們要找出 $W = \mathrm{Span}(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3, \mathbf{w}_4, \mathbf{w}_5)$ 的一組 basis.

考慮 $U = \mathrm{Span}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4)$, 因為 $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4$ 為 linearly independent, 我們知 $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4$ 為 U 的一組 basis. 由於 $\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_5 \in U$, 我們知 W 為 U 的 subspace. 我們的想法是利用 $\beta = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4)$ 這組 U 的 ordered basis 將 U 的元素坐標化. 由於 $\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_5 \in U$, 我們可以將 $\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_5$ 坐標化, 得 $[\mathbf{w}_1]_\beta, \ldots, [\mathbf{w}_5]_\beta$ 這 5 個 $\mathbb{R}^4$ 中的向量. 利用過去我們知道求 $\mathbb{R}^4$ 中 $\mathrm{Span}([\mathbf{w}_1]_\beta, \ldots, [\mathbf{w}_5]_\beta)$ 的 basis 的方法求出一組 basis. 再將它們還原成 U 中的元素, 就得到 W 的一組 basis.

現由於

$$[\mathbf{w}_1]_\beta = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, [\mathbf{w}_2]_\beta = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}, [\mathbf{w}_3]_\beta = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, [\mathbf{w}_4]_\beta = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, [\mathbf{w}_5]_\beta = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

我們考慮以它們為 column 的 4×5 matrix 並利用 elementary row operations 將之化為 echelon form 得

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & -2 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

由於 echelon form 的 1-st, 3-rd, 4-th column 為 pivot 所在位置, 故知 $[\mathbf{w}_1]_\beta, [\mathbf{w}_3]_\beta, [\mathbf{w}_4]_\beta$ 為 $\mathrm{Span}([\mathbf{w}_1]_\beta, \ldots, [\mathbf{w}_5]_\beta)$ 的一組 basis (參見 Proposition 3.7.8). 由於 T_β 為 isomprphism 保持 spanning set 以及 linearly independent 的性質, 我們得 $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_3, \mathbf{w}_4$ 為 W 的一組 basis.

Question 6.12. 考慮 *Example 6.3.11 (B)* 中的 $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4$ 以及 $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3, \mathbf{w}_4, \mathbf{w}_5$. 試問 $\dim(\mathrm{Span}(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3, \mathbf{w}_4, \mathbf{w}_5))$ 為何? 並將 $\mathbf{w}_2, \mathbf{w}_5$ 寫成 $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_3, \mathbf{w}_4$ 的 *linear combination.*

6.3.3. Matrix Representation of general linear transformation. 當 V, W 分別為 dimension 為 n, m 的 vector space over $\mathbb{F}$. 我們可以透過 V, W 的 ordered basis, 將 V, W 的元素轉換成 $\mathbb{F}^n$ 和 $\mathbb{F}^m$ 的 vector. 因此我們可以將 V 到 W 的 linear transformation T 視為 $\mathbb{F}^n$ 到 $\mathbb{F}^m$ 的 linear transformation, 而談論 T 的 matrix representation.

對於一個 linear transformation $T: V \to W$，分別給定 V, W 的一組 ordered basis $\beta = (\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n)$ 以及 $\gamma = (\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_m)$. 令 $T_\beta: V \to \mathbb{F}^n$ 與 $T_\gamma: W \to \mathbb{F}^m$ 分別為利用 β 以及 γ 將 V, W 的元素坐標化的 linear transformation. 如何利用這些 linear transformations 幫助我們找到與 T 相關從 $\mathbb{F}^n$ 到 $\mathbb{F}^m$ 的 linear transformation $T': \mathbb{F}^n \to \mathbb{F}^m$ 呢？通常我們會利用圖示來幫助我們了解較複雜的函數合成問題. 例如圖示如下:

$$\begin{tikzcd}
V \arrow[r, "T"] \arrow[d, "T_\beta"'] & W \arrow[d, "T_\gamma"] \\
\mathbb{F}^n \arrow[r, "T'"] & \mathbb{F}^m
\end{tikzcd}$$

這樣的圖示一般稱為 *commutative diagram.* 它表示 V 中的元素沿著兩個方向到達 $\mathbb{F}^m$ 的結果會是一樣的，也就是說：對任意 $\mathbf{v} \in V$ 經由 T 得到 $T(\mathbf{v}) \in W$ 後再套用 T_γ，即 $T_\gamma(T(\mathbf{v}))$ 會等於將 $\mathbf{v}$ 先套用 T_β 得到 $T_\beta(\mathbf{v})$ 後再經由 T' 所得的 $T'(T_\beta(\mathbf{v}))$。利用合成函數的表法，即為：$T_\gamma \circ T = T' \circ T_\beta$。我們只要確認 $T': \mathbb{F}^n \to \mathbb{F}^m$ 為何，其表現矩陣就稱為 T 相對於 β, γ 這兩組 ordered basis 所得的 *matrix representation*, 並用 $[T]_\beta^\gamma$ 來表示。

到底如何得到 T' 以及 $[T]_\beta^\gamma$ 呢？因為 $T': \mathbb{F}^n \to \mathbb{F}^m$ 為 linear transformation，Theorem 6.1.8 告訴我們：只要確定 $\mathbb{F}^n$ 的一組基底映射到哪裡，就可以確定 T' 了！另一方面 T' 的表現矩陣即為 $[T]_\beta^\gamma$，而此表現矩陣的 i-th column 為 $T'(\mathbf{e}_i)$（Theorem 6.3.1）其中 $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ 為 $\mathbb{F}^n$ 的 standard basis。所以我們只要確定 $T'(\mathbf{e}_1), \ldots, T'(\mathbf{e}_n)$ 為何，不只可以確定 T' 是怎樣的 linear transformation，同時也得到表現矩陣 $[T]_\beta^\gamma$。

我們可以從前面的 commutative diagram 清楚知道如何確定 $T'(\mathbf{e}_1), \ldots, T'(\mathbf{e}_n)$。對任意 $i = 1, \ldots, n$，依 ordered basis $\beta = (\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n)$ 坐標化的方式，$T_\beta(\mathbf{v}_i) = \mathbf{e}_i$。所以由 commutative diagram 知

$$T'(\mathbf{e}_i) = T'(T_\beta(\mathbf{v}_i)) = T_\gamma(T(\mathbf{v}_i)) = [T(\mathbf{v}_i)]_\gamma.$$

也就是說 $[T]_\beta^\gamma$ 的 i-th column 就是將 ordered basis $\beta = (\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n)$ 的第 i 個元素 $\mathbf{v}_i$ 代入 T 中所得的 $T(\mathbf{v}_i) \in W$, 再利用 γ 將其坐標化所得的 $\mathbb{R}^m$ 中的向量. 我們大致上有以下的表示

法

$$[T]_\beta^\gamma=\begin{bmatrix} | & | & & | \\ [T(\mathbf{v}_1)]_\gamma & [T(\mathbf{v}_2)]_\gamma & \cdots & [T(\mathbf{v}_n)]_\gamma \\ | & | & & | \end{bmatrix}.$$

Example 6.3.12. 考慮假設 V 為 finite dimensional vector space over $\mathbb{F}$. 考慮 V 上的 identity map $\mathrm{id}: V\to V$, 亦即對任意 $\mathbf{v}\in V$, 我們定義 $\mathrm{id}(\mathbf{v})=\mathbf{v}$. 很容易看出 id 是一個 linear transformation. 現對任意 V 的 ordered basis $\beta=(\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_n)$, 我們想知道 $\mathrm{id}: V\to V$ 對定義域和對應域都用 β 這個 ordered basis 所得的 matrix representation $[\mathrm{id}]_\beta^\beta$ 為何? 依照前面的討論, 我們知道 $[\mathrm{id}]_\beta^\beta$ 的 1-st column 就是 $\mathrm{id}(\mathbf{v}_1)$ 利用 β 坐標化所得的 $\mathbb{F}^n$ 中的向量. 由於 $\mathrm{id}(\mathbf{v}_1)=\mathbf{v}_1$, 而 $\mathbf{v}_1$ 又是 β 中第一個向量, 故知 $[\mathrm{id}(\mathbf{v}_1)]_\beta=[\mathbf{v}_1]_\beta=\mathbf{e}_1$, 也就是說 $[\mathrm{id}]_\beta^\beta$ 的 1-st column 就是 $\mathbf{e}_1$. 同理 $[\mathrm{id}]_\beta^\beta$ 的 i-th column 就是 $\mathbf{e}_i$. 也就是說 $[\mathrm{id}]_\beta^\beta$ 就是 $n\times n$ 的 identity matrix I_n.

Example 6.3.13. 考慮 $P_2(\mathbb{R})$ 上的 standard ordered basis $\varepsilon_2=(1,x,x^2)$ 以及 $P_3(\mathbb{R})$ 上的 standard ordered basis $\varepsilon_3=(1,x,x^2,x^3)$. 考慮函數 $T: P_2(\mathbb{R})\to P_3(\mathbb{R})$ 定義為, 對任意 $p(x)\in P_2(\mathbb{R})$, $T(p(x))=(x+1)p(x-1)$. 我們先驗證 T 為 linear transformation. 對任意 $p(x),q(x)\in P_2(\mathbb{R})$ 以及 $r\in\mathbb{R}$, 我們有

$$\begin{aligned}&T(p(x)+rq(x))=\\&\qquad(x+1)(p(x-1)+rq(x-1))=(x+1)p(x-1)+r(x+1)q(x-1)=T(p(x))+rT(q(x)).\end{aligned}$$

得證 T 為 linear transformation. 接下來我們要求 T 對於 $\varepsilon_2,\varepsilon_3$ 的 matrix representation $[T]_{\varepsilon_2}^{\varepsilon_3}$. 依照前面的探討, 我們知 $[T]_{\varepsilon_2}^{\varepsilon_3}$ 的 1-st column 應該就是將 1 代入 T, 得 $T(1)=(x+1)\cdot 1$ 再利用 ε_3 將 $x+1$ 坐標化寫成 $\mathbb{R}^4$ 的向量. 由於 $x+1=1+x+0x^2+0x^3$, 所以得 $[T]_{\varepsilon_2}^{\varepsilon_3}$ 的 1-st column 為

$$[T(1)]_{\varepsilon_3}=[x+1]_{\varepsilon_3}=\begin{bmatrix}1\\1\\0\\0\end{bmatrix}.$$

同理我們有 $[T]_{\varepsilon_2}^{\varepsilon_3}$ 的 2-nd, 3-rd column 分別為

$$[T(x)]_{\varepsilon_3}=[(x+1)(x-1)]_{\varepsilon_3}=[x^2-1]=\begin{bmatrix}-1\\0\\1\\0\end{bmatrix},$$

$$[T(x^2)]_{\varepsilon_3}=[(x+1)(x-1)^2]_{\varepsilon_3}=[x^3-x^2-x+1]_{\varepsilon_3}=\begin{bmatrix}1\\-1\\-1\\1\end{bmatrix}.$$

因此得

$$[T]_{\varepsilon_2}^{\varepsilon_3}=\begin{bmatrix}1&-1&1\\1&0&-1\\0&1&-1\\0&0&1\end{bmatrix}.$$

我們更換 $P_2(\mathbb{R})$ 以及 $P_3(\mathbb{R})$ 的 ordered basis. 我們可以考慮 $P_2(\mathbb{R})$ 的一組 basis $p_1(x), p_2(x), p_3(x)$, 其中

$$\begin{array}{lll} p_1(-1)=1 & p_1(0)=0 & p_1(1)=0 \\ p_2(-1)=0 & p_2(0)=1 & p_2(1)=0 \\ p_3(-1)=0 & p_3(0)=0 & p_3(1)=1 \end{array}$$

令 $\beta=(p_1(x),p_2(x),p_3(x))$ 為 $P_2(\mathbb{R})$ 的 ordered basis. 同樣的我們考慮 $P_3(\mathbb{R})$ 的一組 basis $q_1(x),q_2(x),q_3(x),q_4(x)$, 其中

$$\begin{array}{llll} q_1(-1)=1 & q_1(0)=0 & q_1(1)=0 & q_1(2)=0 \\ q_2(-1)=0 & q_2(0)=1 & q_2(1)=0 & q_2(2)=0 \\ q_3(-1)=0 & q_3(0)=0 & q_3(1)=1 & q_3(2)=0 \\ q_4(-1)=0 & q_4(0)=0 & q_4(1)=0 & q_4(2)=1. \end{array}$$

令 $\gamma=(q_1(x),q_2(x),q_3(x),q_4(x))$ 為 $P_3(\mathbb{R})$ 的 ordered basis. 我們要得到 T 對於 β,γ 的 matrix representation $[T]_\beta^\gamma$. 首先 $[T]_\beta^\gamma$ 的 1-st column 為 $T(p_1(x))=(x+1)p_1(x-1)$ 利用 γ 坐標化所得 $\mathbb{R}^4$ 的向量. 現若 $(x+1)p_1(x-1)=c_1q_1(x)+c_2q_2(x)+c_3q_3(x)+c_4q_4(x)$. 將 x 分別代 $-1,0,1,2$, 我們得到

$$c_1=(-1+1)p_1(-2)=0, c_2=(0+1)p_1(-1)=1, c_3=(1+1)p_1(0)=0, c_4=(2+1)p_1(1)=0.$$

也就是說 $[T]_\beta^\gamma$ 的 1-st column 為

$$[T(p_1(x))]_\gamma=[(x+1)p_1(x-1)]_\gamma=\begin{bmatrix}0\\1\\0\\0\end{bmatrix}.$$

同樣的方法我們可以得到 $[T]_\beta^\gamma$ 的 2-nd, 3-rd column 分別為

$$[T(p_2(x))]_\gamma=[(x+1)p_2(x-1)]\gamma=\begin{bmatrix}0\\0\\2\\0\end{bmatrix}, [T(p_3(x))]_\gamma=[(x+1)p_3(x-1)]_\gamma=\begin{bmatrix}0\\0\\0\\3\end{bmatrix}.$$

因此得

$$[T]_\beta^\gamma=\begin{bmatrix}0&0&0\\1&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{bmatrix}.$$

由 Example 6.3.13 我們知道同樣的 linear transformation 用不同的 ordered basis 會有不同的 matrix representation. 也因此要注意當要寫下 matrix representation 時一定要表明定義域和對應域的 ordered basis 為何.

到底 matrix representation 有何用處呢？就如同在 $\mathbb{F}^n$ 上的 standard matrix representation, 利用 matrix representation 可以很快的幫我們求出 linear transformation 在定義域的每個元素的取值. 讓我們再用剛才的 commutative diagram 說明：

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "T"] \arrow[d, "T_\beta"'] & W \arrow[d, "T_\gamma"] \\ \mathbb{F}^n \arrow[r, "T'"] & \mathbb{F}^m \end{tikzcd}$$

利用 $T':\mathbb{F}^n\to\mathbb{F}^m$ 來表示原本 $T:V\to W$ 到底有何好處呢？主要的原因是 $\mathbb{F}^n\to\mathbb{F}^m$ 這一段的路徑, 有 standard matrix representation, 即 $[T]_\beta^\gamma$. 也就是說對於任意 $\mathbb{F}^n$ 的向量, 我們只要左邊乘上 $[T]_\beta^\gamma$ 就可以知道會被映射到哪一個 $\mathbb{F}^m$ 的向量. 所以對任意 $\mathbf{v}\in V$, 我們可以先利用 β 將 $\mathbf{v}$ 坐標化得 $T_\beta(\mathbf{v})=[\mathbf{v}]_\beta$. 接著由於 $[\mathbf{v}]_\beta\in\mathbb{F}^n$, 故將之代入 T' 就是將 $[\mathbf{v}]_\beta$ 左邊乘上 $[T]_\beta^\gamma$ 這一個 matrix，即 $T'(T_\beta(\mathbf{v}))=[T]_\beta^\gamma[\mathbf{v}]_\beta$. 由於 $T'(T_\beta(\mathbf{v}))=T_\gamma(T(\mathbf{v}))=[T(\mathbf{v})]_\gamma$，所以 $T(\mathbf{v})$ 利用 W 的 ordered basis γ 寫成 $\mathbb{F}^m$ 上的坐標就是 $[T]_\beta^\gamma[\mathbf{v}]_\beta$。也就是說：我們只要將 $[T]_\beta^\gamma[\mathbf{v}]_\beta$ 這個 $\mathbb{F}^m$ 中的坐標還原回 W 的元素，就是 $T(\mathbf{v})$ 之值. 因此我們有以下之結果.

Proposition 6.3.14. 假設 V,W 為 *vector space over* $\mathbb{F}$ 且 $\beta=(\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_n)$, $\gamma=(\mathbf{w}_1,\ldots,\mathbf{w}_m)$ 分別為 V,W 的 *ordered basis.* 設 $T:V\to W$ 為 *linear transformation* 且 $[T]_\beta^\gamma\in M_{m\times n}(\mathbb{F})$ 為 T 相對於 β,γ 的 *matrix representation.* 對於任意 $\mathbf{v}\in V$, 若 $\mathbf{v}=c_1\mathbf{v}_1+\cdots+c_n\mathbf{v}_n$ 且

$$[T]_\beta^\gamma\begin{bmatrix}c_1\\ \vdots\\ c_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}d_1\\ \vdots\\ d_m\end{bmatrix},$$

則 $T(\mathbf{v})=d_1\mathbf{w}_1+\cdots+d_m\mathbf{w}_m$. 亦即

$$[T]_\beta^\gamma[\mathbf{v}]_\beta=[T(\mathbf{v})]_\gamma.$$

Proof. 因 $\mathbf{v}=c_1\mathbf{v}_1+\cdots+c_n\mathbf{v}_n$, 依定義 $\mathbf{v}$ 利用 β 坐標化所得 $\mathbb{F}^n$ 的向量 $T_\beta(\mathbf{v})$ 為 $\begin{bmatrix}c_1\\ \vdots\\ c_n\end{bmatrix}$. 故由前面所述 $T_\gamma\circ T\circ T_\beta^{-1}(T_\beta(\mathbf{v}))=T_\gamma(T(\mathbf{v}))$ 就是將 $\begin{bmatrix}c_1\\ \vdots\\ c_n\end{bmatrix}$ 左邊乘上 $[T]_\beta^\gamma$ 所得的 $\mathbb{F}^m$ 中向量 $\begin{bmatrix}d_1\\ \vdots\\ d_m\end{bmatrix}$. 故由 $T_\gamma(T(\mathbf{v}))=\begin{bmatrix}d_1\\ \vdots\\ d_m\end{bmatrix}$ 可得 $T(\mathbf{v})=d_1\mathbf{w}_1+\cdots+d_m\mathbf{w}_m$. □

Example 6.3.15. 我們考慮 Example 6.3.13 的例子, 即考慮 $T:P_2(\mathbb{R})\to P_3(\mathbb{R})$, 其中對於任意 $p(x)\in P_2(\mathbb{R})$, $T(p(x))=(x+1)p(x-1)$. 考慮 $p(x)=x^2-1$ 的情形. 因 $p(x-1)=(x-1)^2-1$, 依 T 的定義得

$$T(p(x))=(x+1)p(x-1)=(x+1)((x-1)^2-1)=x^3-x^2-2x.$$

當考慮 $P_2(\mathbb{R})$ 的 ordered basis $\varepsilon_2=(1,x,x^2)$ 以及 $P_3(\mathbb{R})$ 的 ordered basis $\varepsilon_3=(1,x,x^2,x^3)$, 我們知道 T 對於 $\varepsilon_2,\varepsilon_3$ 的 matrix representation 為 $[T]_{\varepsilon_2}^{\varepsilon_3}=\begin{bmatrix}1&-1&1\\1&0&-1\\0&1&-1\\0&0&1\end{bmatrix}$ 故由 $[p(x)]_{\varepsilon_2}=$

$[x^2-1]_{\varepsilon_2}=\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix}$ 得

$$[T(p(x))]_{\varepsilon_3}=\begin{bmatrix}1&-1&1\\1&0&-1\\0&1&-1\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\-2\\-1\\1\end{bmatrix},$$

即 $T(p(x))=x^3-x^2-2x$.

當然我們也可以利用 Example 6.3.13 中 V 的 ordered basis $\beta=(p_1(x),p_2(x),p_3(x))$ 以及 W 的 ordered basis $\gamma=(q_1(x),q_2(x),q_3(x),q_4(x))$ 求出 $T(x^2-1)$. 此時若 $p(x)=x^2-1=c_1p_1(x)+c_2p_2(x)+c_3p_3(x)$, 則代 $x=-1,0,1$ 得 $c_1=0$, $c_2=-1$, $c_3=0$, 亦即 $[p(x)]_\beta=\begin{bmatrix}0\\-1\\0\end{bmatrix}$. 故將 $[p(x)]_\beta$ 左邊乘上 T 對於 β,γ 的 representation matrix $[T]_\beta^\gamma$ 得

$$[T(p(x))]_\gamma=\begin{bmatrix}0&0&0\\1&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\-1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\-2\\0\end{bmatrix}.$$

得知 $T(p(x))=-2q_3(x)$. 由於 $q_3(-1)=q_3(0)=q_3(2)=0$ 以及 $q_3(1)=1$, 我們有 $q_3(x)=(x+1)x(x-2)/(-2)$, 故得 $T(p(x))=(x+1)x(x-2)=x^3-x^2-2x$.

當 $T:\mathbb{F}^n\to\mathbb{F}^m$ 是 linear transformation 時, 我們可以利用 T 的 standard matrix representation $[T]$ 的 null space 來決定 T 的 null space, 也可利用 $[T]$ 的 column space 來決定 T 的 range. 同樣的, 當 $T:V\to W$, 為 linear transformation, 我們也可利用 T 的 matrix representation 來決定 T 的 null space 和 range. 分別選定 V 和 W 的 ordered basis $\beta=(\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_n)$ 和 $\gamma=(\mathbf{w}_1,\ldots,\mathbf{w}_m)$. 由前面的 commutative diagram, 利用 $V\to W$ 接著 $W\to\mathbb{F}^m$ 的路徑以及 $V\to\mathbb{F}^n$ 接著 $\mathbb{F}^n\to\mathbb{F}^m$ 的路徑, 對於任意 $\mathbf{v}=c_1\mathbf{v}_1+\cdots+c_n\mathbf{v}_n\in V$, 我們有

$$[T(\mathbf{v})]_\gamma=[T]_\beta^\gamma\begin{bmatrix}c_1\\\vdots\\c_n\end{bmatrix}. \tag{6.1}$$

現若 $\mathbf{v}\in\mathsf{N}(T)$, 表示 $T(\mathbf{v})=\mathbf{0}$, 因此由 $[T(\mathbf{v})]_\gamma=[\mathbf{0}]_\gamma=\begin{bmatrix}0\\\vdots\\0\end{bmatrix}$, 得 $[T]_\beta^\gamma\begin{bmatrix}c_1\\\vdots\\c_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\\vdots\\0\end{bmatrix}$, 亦即 $\begin{bmatrix}c_1\\\vdots\\c_n\end{bmatrix}=[\mathbf{v}]_\beta$ 為 $[T]_\beta^\gamma$ 的 null space 的向量. 反之, 若 $\begin{bmatrix}c_1\\\vdots\\c_n\end{bmatrix}\in\mathbb{F}^n$ 為 $[T]_\beta^\gamma$ 的 null space 的向量, 表示 $[T]_\beta^\gamma\begin{bmatrix}c_1\\\vdots\\c_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\\vdots\\0\end{bmatrix}$. 故由式子 (6.1) 知, 當 $\mathbf{v}=c_1\mathbf{v}_1+\cdots+c_n\mathbf{v}_n$ 時, 我們有 $[T(\mathbf{v})]_\gamma=\begin{bmatrix}0\\\vdots\\0\end{bmatrix}$. 此即表示 $T(\mathbf{v})=\mathbf{0}$, 得證 $\mathbf{v}=c_1\mathbf{v}_1+\cdots+c_n\mathbf{v}_n\in\mathsf{N}(T)$.

另一方面, 若 $\mathbf{w}=d_1\mathbf{w}_1+\cdots+d_m\mathbf{w}_m\in \mathsf{R}(T)$, 表示存在 $\mathbf{v}=c_1\mathbf{v}_1+\cdots+c_n\mathbf{v}_n\in V$, 使得 $T(\mathbf{v})=\mathbf{w}$. 因此由式子 (6.1) 知, $\begin{bmatrix} d_1\\ \vdots\\ d_m\end{bmatrix}=[T(\mathbf{v})]_\gamma=[T]_\beta^\gamma\begin{bmatrix} c_1\\ \vdots\\ c_n\end{bmatrix}$, 亦即 $\begin{bmatrix} d_1\\ \vdots\\ d_m\end{bmatrix}$ 是 $[T]_\beta^\gamma$ 的 column space 的向量. 反之, 若 $\begin{bmatrix} d_1\\ \vdots\\ d_m\end{bmatrix}\in\mathbb{F}^m$ 為 $[T]_\beta^\gamma$ 的 column space 的向量, 表示存在 $\begin{bmatrix} c_1\\ \vdots\\ c_n\end{bmatrix}\in\mathbb{F}^n$ 使得 $\begin{bmatrix} d_1\\ \vdots\\ d_m\end{bmatrix}=[T]_\beta^\gamma\begin{bmatrix} c_1\\ \vdots\\ c_n\end{bmatrix}$. 故由式子 (6.1) 知, 若令 $\mathbf{v}=c_1\mathbf{v}_1+\cdots+c_n\mathbf{v}_n$, 我們有 $[T(\mathbf{v})]_\gamma=\begin{bmatrix} d_1\\ \vdots\\ d_m\end{bmatrix}$, 得證 $d_1\mathbf{w}_1+\cdots+d_m\mathbf{v}_m=T(\mathbf{v})\in\mathsf{R}(T)$. 我們證得了以下的結果.

Proposition 6.3.16. 假設 V,W 為 *vector space* 且 $\beta=(\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_n)$, $\gamma=(\mathbf{w}_1,\ldots,\mathbf{w}_m)$ 分別為 V,W 的 *ordered basis.* 設 $T:V\to W$ 為 *linear transformation* 且 $[T]_\beta^\gamma\in M_{m\times n}(\mathbb{F})$ 為 T 相對於 β,γ 的 *matrix representation.* 則 $c_1\mathbf{v}_1+\cdots+c_n\mathbf{v}_n\in\mathsf{N}(T)$ 若且唯若 $\begin{bmatrix} c_1\\ \vdots\\ c_n\end{bmatrix}$ 屬於 $[T]_\beta^\gamma$ 的 *null space.* 而 $d_1\mathbf{w}_1+\cdots+d_m\mathbf{w}_m\in\mathsf{R}(T)$ 若且唯若 $\begin{bmatrix} d_1\\ \vdots\\ d_m\end{bmatrix}$ 屬於 $[T]_\beta^\gamma$ 的 *column space.*

Example 6.3.17. 我們考慮 Example 6.3.13 的例子, 當考慮 $P_2(\mathbb{R})$ 的 ordered basis $\varepsilon_2=(1,x,x^2)$ 以及 $P_3(\mathbb{R})$ 的 ordered basis $\varepsilon_3=(1,x,x^2,x^3)$, 我們知道 T 對於 $\varepsilon_2,\varepsilon_3$ 的 matrix representation $T_{\varepsilon_2}^{\varepsilon_3}$ 利用 elementary row operations 化為 echelon form 可得

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1\\ 1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\rightsquigarrow\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1\\ 0 & 1 & -2\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}.$$

由於 pivot 的個數等於 column 的個數, 我們知 $T_{\varepsilon_2}^{\varepsilon_3}$ 的 null space 為 $\{\begin{bmatrix} 0\\ 0\\ 0\end{bmatrix}\}$, 故知 $\mathsf{N}(T)=\{\mathbf{0}\}$, 亦即 T 為 one-to-one. 另一方面 $[T]_{\varepsilon_2}^{\varepsilon_3}$ 的 rank 為 3, 故 $\{\begin{bmatrix} 1\\ 1\\ 0\\ 0\end{bmatrix},\begin{bmatrix} -1\\ 0\\ 1\\ 0\end{bmatrix},\begin{bmatrix} 1\\ -1\\ -1\\ 1\end{bmatrix}\}$ 為 column space 的一組 basis. 因此得 $\{x+1,x^2-1,x^3-x^2-x+1\}$ 為 $\mathsf{R}(T)$ 的一組 basis. 由於 $\dim(P_3(\mathbb{R}))=4\neq\dim(\mathsf{R}(T))=3$, 我們知 $\mathsf{R}(T)\neq P_3(\mathbb{R})$, 故 T 不是 onto.

Example 6.3.18. 考慮 $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ 所形成的 vector space (參見 Example 3.2.2 (A)). 考慮函數 $T:M_{2\times 2}(\mathbb{R})\to M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ 定義為 $T(A)=A-A^{\mathrm{t}}$, $\forall A\in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$. 我們可得 T 為 linear transformation. 這是因為對任意 $A,B\in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ 以及 $r\in\mathbb{R}$, 我們有

$$T(A+rB)=(A+rB)-(A+rB)^{\mathrm{t}}=A+rB-A^{\mathrm{t}}-rB^{\mathrm{t}}=(A-A^{\mathrm{t}})+r(B-B^{\mathrm{t}})=T(A)+rT(B).$$

考慮 $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ 的 ordered basis $\varepsilon = \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right)$. 由於

$$T(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad T(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$T(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad T(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

我們得 T 對於 ε, ε 的 matrix representation 為 $[T]_\varepsilon^\varepsilon = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. 利用 elementary row operation 將 $[T]_\varepsilon^\varepsilon$ 化為 echelon form $\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. 得到 $[T]_\varepsilon^\varepsilon$ 的 null space 的一組 basis 為 $\{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\}$, 因此得 $\{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\}$ 為 $\mathsf{N}(T)$ 的一組 basis. 又 $[T]_\varepsilon^\varepsilon$ 的 column space 的一組 basis 為 $\{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}\}$, 故得 $\{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\}$ 為 T 的 range $\mathsf{R}(T)$ 的一組 basis. 注意我們有 $\dim(\mathsf{R}(T)) + \dim(\mathsf{N}(T)) = 1 + 3 = 4 = \dim(M_{2\times 2}(\mathbb{R}))$. 另外若 $A \in \mathsf{N}(T)$ 表示 $T(A) = A - A^t = \mathbf{0}$, 亦即 $A = A^t$. 反之亦然, 也就是說 $A \in \mathsf{N}(T)$ 若且唯若 A 為 symmetric matrix. 因此由 $\dim(\mathsf{N}(T)) = 3$, 我們知所有 2×2 的 symmetric matrices 所成的 subspace 的維度為 3.

Question 6.13. 試求所有 3×3 的 *symmetric matrices* 所成的 *subspace* 的維度為何?

Exercise 6.7. (**註**:此題為 optional,不考但歡迎論壇上討論)

考慮 linear transformations $T : V \to W$, $F : W \to U$.

(1) 假設 W' 為 W 的 subspace, 考慮 $F' : W' \to U$ 為將 F 的定義域限制在 W' 的 linear transformation (即 $F'(\mathbf{w}) = F(\mathbf{w})$, $\forall \mathbf{w} \in W'$). 證明:

$$F'(W') = F(W'), \quad N(F') = N(F) \cap W',$$

並以此證明:

$$\dim(N(F)) \geq \dim(W') - \dim(F(W')).$$

(2) 考慮 (1) 中 $W' = T(V)$ 的情況,利用 $\operatorname{rank}(F) = \dim(W) - \dim(N(F))$ 證明

$$\operatorname{rank}(F) \leq \dim(W) - \operatorname{rank}(T) + \operatorname{rank}(F \circ T).$$

(3) 說明

$$\operatorname{rank}(F) + \operatorname{rank}(T) - \dim(W) \leq \operatorname{rank}(F \circ T) \leq \min\{\operatorname{rank}(T), \operatorname{rank}(F)\}.$$

Exercise 6.8. 試寫下以下 linear transformations 的 standard matrix representation 並利用所找的矩陣求出其 kernel 和 image 的 basis.

(1) $T_1 : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^4$, 定義為

$$T_1(a,b,c,d,e) = (a-c+3d-e, a+2d-e, 2a-c+5d-e, -c+d).$$

(2) $T_2 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, 定義為 $T_2(\mathbf{v}) = [\mathbf{v}]_\beta$，其中 β 為 $\mathbb{R}^3$ 的一組 ordered basis

$$\beta = (\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2+\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_2+\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_3).$$

Exercise 6.9. 假設 $\beta = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4)$ 為 V 的一組 ordered basis. 令

$$\mathbf{w}_1 = \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3 + 3\mathbf{v}_4, \mathbf{w}_2 = -\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3 + 2\mathbf{v}_4,$$

$$\mathbf{w}_3 = 5\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3 + 5\mathbf{v}_4, \mathbf{w}_4 = \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_3 - 3\mathbf{v}_4, \mathbf{w}_5 = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2.$$

(1) 說明 $\beta' = (\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_4, \mathbf{w}_5)$ 也是 V 的一組 ordered basis.

(2) 假設 $T_{\beta'}$ 為用 β' 將 V 坐標化的函數, 試寫下 $T_{\beta'}(\mathbf{v}_i)$, $i = 1,2,3,4$.

(3) 說明兩方陣

$$\begin{bmatrix} | & | & | & | \\ T_\beta(\mathbf{w}_1) & T_\beta(\mathbf{w}_2) & T_\beta(\mathbf{w}_4) & T_\beta(\mathbf{w}_5) \\ | & | & | & | \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} | & | & | & | \\ T_{\beta'}(\mathbf{v}_1) & T_{\beta'}(\mathbf{v}_2) & T_{\beta'}(\mathbf{v}_3) & T_{\beta'}(\mathbf{v}_4) \\ | & | & | & | \end{bmatrix}$$

之間的關係.

Exercise 6.10. 考慮 linear transformation $T : P_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$ 定義為：

$$T(a+bx+cx^2) = \begin{bmatrix} b+c & a \\ b & c \end{bmatrix}.$$

(1) 試求 $[T]_\varepsilon^{\varepsilon'}$, 其中 $\varepsilon, \varepsilon'$ 分別為 $P_2(\mathbb{R}), M_2(\mathbb{R})$ 的 standard ordered basis

$$\varepsilon = (1, x, x^2), \varepsilon' = (\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}).$$

(2) 試求 $[T]_\beta^\gamma$, 其中 β, γ 分別為 $P_2(\mathbb{R}), M_2(\mathbb{R})$ 的 ordered basis

$$\beta = (1, x, 1+x^2), \gamma = (\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}).$$

(3) 試分別利用 (1), (2) 的表現矩陣求 $N(T)$ 和 $R(T)$ 的一組 basis.