當 T_1, T_2 皆為 $\mathbb{F}^n$ 到 $\mathbb{F}^m$ 的 linear transformation 時, 對任意 $c_1, c_2 \in \mathbb{F}$, 我們知道 $c_1T_1 + c_2T_2$ 的 standard matrix representation $[c_1T_1 + c_2T_2]$ 和 T_1, T_2 的 standard matrix representations $[T_1], [T_2]$ 的關係為 $[c_1T_1 + c_2T_2] = c_1[T_1] + c_2[T_2]$ (參見 Lemma 6.3.7). 這對於一般的 linear transformations $T_1 : V \to W$ 以及 $T_2 : V \to W$ 的 matrix representations 也是對的. 不過要特別注意, 一般的 linear transformation 的 matrix representation 是和定義域以及對應域的 ordered basis 有關, 所以只有當 T_1, T_2 都考慮對應相同的 ordered basis 所得的 matrix representation, 這樣的矩陣運算才有意義. 也就是說當分別給定 V, W 的 ordered basis, β, γ, 我們會有

$$[c_1T_1 + c_2T_2]^\gamma_\beta = c_1[T_1]^\gamma_\beta + c_2[T_2]^\gamma_\beta.$$

對於合成函數也有類似的情況, 若 $T : V \to W$, $T' : W \to U$ 為 linear transformations. 若分別給定 V, W, U 的 ordered basis α, β, γ, 我們有以下的圖示

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "T"] \arrow[d, "T_\alpha"'] & W \arrow[d, "T_\beta"] \\ \mathbb{F}^n \arrow[r] & \mathbb{F}^m \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} W \arrow[r, "T'"] \arrow[d, "T_\beta"'] & U \arrow[d, "T_\gamma"] \\ \mathbb{F}^m \arrow[r] & \mathbb{F}^k \end{tikzcd}$$

這裡由於 T 的對應域和 T' 的定義域相同, 所以我們可以考慮合成函數 $T' \circ T$. 又由於 W 都用固定的 ordered basis β, 所以兩邊 W 到 $\mathbb{F}^m$ 的之間的函數相同 (皆為 T_β). 因此我們可以將上面兩個 commutative diagrams 合併成一個 commutative diagram 如下:

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "T"] \arrow[d, "T_\alpha"'] & W \arrow[r, "T'"] \arrow[d, "T_\beta"] & U \arrow[d, "T_\gamma"] \\ \mathbb{F}^n \arrow[r] & \mathbb{F}^m \arrow[r] & \mathbb{F}^k \end{tikzcd}$$

由於底部 $\mathbb{F}^n \to \mathbb{F}^m$ 的 matrix representation 為 $[T]^\beta_\alpha$, 而 $\mathbb{F}^m \to \mathbb{F}^k$ 的 matrix representation 為 $[T']^\gamma_\beta$, 因此由 Lemma 6.3.7 知, 它們的合成所對應的 matrix representation 為 $[T']^\gamma_\beta[T]^\beta_\alpha$. 因此我們有

$$[T' \circ T]^\gamma_\alpha = [T']^\gamma_\beta[T]^\beta_\alpha.$$

綜合以上的討論, 我們有以下有關 Lemma 6.3.7 的推廣.

Theorem 6.3.19. 假設 V, W, U 為 *finite dimensional vector space over* $\mathbb{F}$ 且令 α, β, γ 分別為 V, W, U 的 *ordered basis.*

(1) 假設 T_1, T_2 為 V 到 W 的 *linear transformations.* 則對任意 $c_1, c_2 \in \mathbb{F}$, 我們有

$$[c_1T_1 + c_2T_2]^\beta_\alpha = c_1[T_1]^\beta_\alpha + c_2[T_2]^\beta_\alpha.$$

(2) 設 $T : V \to W$ 及 $T' : W \to U$ 為 *linear transformation.* 則

$$[T' \circ T]^\gamma_\alpha = [T']^\gamma_\beta[T]^\beta_\alpha.$$

假設 V, W 為 finite dimensional vector space over $\mathbb{F}$, 其中 $\dim(V) = n, \dim(W) = m$. 令 $\mathscr{L}(V, W)$ 為所有 V 到 W 的 linear transformations 所成的集合. Proposition 6.1.6 告訴我們 $\mathscr{L}(V, W)$ 有加法和係數積的封閉性. 很容易證明 $\mathscr{L}(V, W)$ 是一個 over $\mathbb{F}$ 的 vector space.

令 β, γ 分別為 V,W 上的 ordered basis, 我們可以訂一出一個由 $\mathscr{L}(V,W)$ 到 $M_{m\times n}(\mathbb{F})$ 的函數 $\mathscr{M}:\mathscr{L}(V,W)\to M_{m\times n}(\mathbb{F})$, 其定義為對任意 $T\in\mathscr{L}(V,W)$, $\mathscr{M}(T)=[T]_\beta^\gamma$. Theorem 6.3.19 告訴我們 $\mathscr{M}:\mathscr{L}(V,W)\to M_{m\times n}(\mathbb{F})$ 是一個 linear transformation. 我們有以下的結果.

Theorem 6.3.20. 假設 V,W 為 *finite dimensional vector space over* $\mathbb{F}$, 其中 $\dim(V)=n, \dim(W)=m$. 給定 β, γ 分別為 V,W 上的 *ordered basis,* 定義函數 $\mathscr{M}:\mathscr{L}(V,W)\to M_{m\times n}(\mathbb{F})$, 其中 $\forall T\in\mathscr{L}(V,W)$, $\mathscr{M}(T)=[T]_\beta^\gamma$. 則 $\mathscr{M}:\mathscr{L}(V,W)\to M_{m\times n}(\mathbb{F})$ 是一個 *one-to-one* 且 *onto* 的 *linear transformation.* 並可得 $\dim_{\mathbb{F}}(\mathscr{L}(V,W))=mn$.

Proof. 對任意 $T_1,T_2\in\mathscr{L}(V,W)$ 以及 $c\in\mathbb{F}$, 我們有 $\mathscr{M}(T_1+cT_2)=[T_1+cT_2]_\beta^\gamma$, 而 $\mathscr{M}(T_1)+c\mathscr{M}[T_2]=[T_1]_\beta^\gamma+c[T_2]_\beta^\gamma$, 故由 Theorem 6.3.19(1) 知 $\mathscr{M}(T_1+cT_2)=\mathscr{M}(T_1)+c\mathscr{M}(T_2)$.

假設 $\beta=(\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_n)$ 以及 $\gamma=(\mathbf{w}_1,\ldots,\mathbf{w}_m)$, 對任意 $A=[a_{ij}]\in M_{m\times n}(\mathbb{F})$, 由於 A 的 i-th column 為 $\begin{bmatrix} a_{1i}\\ \vdots \\ a_{mi}\end{bmatrix}$, 對任意 $i=1,\ldots,n$ 我們考慮 $T\in\mathscr{L}(V,W)$ 為唯一的 linear transformation 滿足 $T(\mathbf{v}_i)=a_{1i}\mathbf{w}_1+\cdots+a_{mi}\mathbf{w}_m$ (參見 Theorem 6.1.8). 依定義 $[T]_\beta^\gamma$ 的 i-th column 為 $[T(\mathbf{v}_i)]_\gamma$ 與 A 的 i-th column 相同, 故證得 $\mathscr{M}(T)=[T]_\beta^\gamma=A$. 這證得了 $\mathscr{M}:\mathscr{L}(V,W)\to M_{m\times n}(\mathbb{F})$ 是 onto, 也證得它是 one-to-one, 因為這樣的 $T\in\mathscr{L}(V,W)$ 是唯一的.

最後利用 Dimension Theorem (Theorem 6.2.9), 我們知道 $\mathrm{rank}(\mathscr{M})+\mathrm{nullity}(\mathscr{M})=\dim_{\mathbb{F}}(\mathscr{L}(V,W))$. 由於 $\mathscr{M}$ 是 one-to-one, $\mathrm{nullity}(\mathscr{M})=0$. 又由於 $\mathscr{M}$ 是 onto, 我們知 $\mathrm{rank}(\mathscr{M})=\dim_{\mathbb{F}}(M_{m\times n}(\mathbb{F}))=mn$. 故得證 $\dim_{\mathbb{F}}(\mathscr{L}(V,W))=mn$. □

Theorem 6.3.20, 告訴我們線性映射和矩陣間的對應關係. 也就是說我們可以利用表現矩陣來了解線性映射, 也可以用線性映射來了解矩陣. 兩者之間互相的關係大家應充分體會.

6.4. Invertible Linear Transformation

一般來說, 當一個函數是 invertible (即 one-to-one 且 onto) 時, 並不容易將其 inverse (反函數) 具體的寫下來. 這一節中我們將學得, 對於 invertible linear transformation, 利用 matrix representation 我們可以很容易的將其 inverse 寫下.

首先我們來探討何時一個 linear transformation 會是 invertible. 假設 $T:V\to W$ 為 invertible linear transformation. 由於 T 為 onto, 我們需要 $\mathrm{rank}(T)=\dim(W)$ (Proposition 6.2.3). 然而 T 為 one-to-one, 故知 $\dim(\mathsf{N}(T))=\mathrm{nullity}(T)=0$ (Proposition 6.2.6). 利用 Dimension Theorem for linear transformation (Theorem 6.2.9) 我們得

$$\dim(V)=\mathrm{rank}(T)+\mathrm{nullity}(T)=\dim(W)+0=\dim(W).$$

這告訴我們只有在 $\dim(V)=\dim(W)$ 時, T 才有可能為 invertible. 現假設 $\dim(V)=\dim(W)$ 且 $T:V\to W$ 為 one-to-one, 由 $\mathrm{nullity}(T)=0$, 我們得 $\mathrm{rank}(T)=\dim(V)=\dim(W)$, 亦即 T 為 onto. 同樣的, 若 T 為 onto, 則由 $\mathrm{rank}(T)=\dim(W)=\dim(V)$ 得 $\mathrm{nullity}(T)=0$, 亦即 T 為 one-to-one. 這告訴我們當 $\dim(V)=\dim(W)$ 時, 對於 linear transformation $T:V\to W$, T 為 one-to-one 和 T 為 onto 是等價的. 因而只要其中一個是對的, 就可以得到 T 為 invertible.

Lemma 6.4.1. 假設 V,W 為 *finite dimensional vector spaces over* $\mathbb{F}$ 且 $T: V \to W$ 為 *linear transformation.* 則僅有當 $\dim(V) = \dim(W)$ 時, T 才有可能是 *invertible.* 又當 $\dim(V) = \dim(W)$ 時, T 為 *invertible* 和 T 為 *onto* 是等價的也和 T 為 *one-to-one* 等價.

由 Lemma 6.4.1 我們知道若 $T: V \to W$ 為 invertible, 則 $\dim(V) = \dim(W)$. 換句話說若 $\dim(V) \neq \dim(W)$, 則不可能存在一個 V 到 W 的 invertible linear transformation. 這個性質的反向也是對的, 我們有以下的定理.

Proposition 6.4.2. 設 V,W 為 *finite dimensional vector spaces over* $\mathbb{F}$. 則存在 $T: V \to W$ 為 *invertible linear transformation* 若且唯若 $\dim(V) = \dim(W)$.

Proof. 由 Lemma 6.4.1, 我們僅要證明若 $\dim(V) = \dim(W)$ 則存在 linear transformation $T: V \to W$ 為 invertible. 令 $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ 和 $\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_n$ 分別為 V 的一組 basis 和 W 的一組 basis. 考慮一 linear transformation $T: V \to W$ 滿足 $T(\mathbf{v}_i) = \mathbf{w}_i$, $\forall i = 1, \ldots, n$ (參見 Theorem 6.1.8). 我們要說明 T 為 invertible. 然而由 Proposition 6.2.4 知 $\mathsf{R}(T) = \mathrm{Span}(T(\mathbf{v}_1), \ldots, T(\mathbf{v}_n)) = \mathrm{Span}(\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_n)$. 又由 $\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_n$ 為 W 的一組 basis 知 $\mathrm{Span}(\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_n) = W$. 故得證 $\mathsf{R}(T) = W$, 即 T 為 onto. 再由 Lemma 6.4.1 得證 T 為 invertible. □

當 $T: V \to W$ 是 one-to-one 且 onto 時, 我們知道它是 invertible, 亦即存在 $T^{-1}: W \to V$, 滿足對所有 $\mathbf{v} \in V$ 皆有 $T^{-1} \circ T(\mathbf{v}) = T^{-1}(T(\mathbf{v})) = \mathbf{v}$ 以及對任意 $\mathbf{w} \in W$ 皆有 $T \circ T^{-1}(\mathbf{w}) = T(T^{-1}(\mathbf{w})) = \mathbf{w}$. 一般來說我們稱 T^{-1} 為 T 的 *inverse* (反函數). 我們都知道 $T^{-1}: W \to V$ 仍為 one-to-one 且 onto, 不過令人好奇的是它是否仍為 linear transformation? 我們有以下之結果.

Theorem 6.4.3. 假設 V,W 為 *vector spaces over* $\mathbb{F}$ 且 $T: V \to W$ 為 *linear transformation.* 若 T 為 *invertible,* 則 T 的 *inverse* $T^{-1}: W \to V$ 亦為 *linear transformation.*

Proof. 對於任意 $\mathbf{w} \in W$, 由於 T 是 one-to-one 且 onto, 故存在唯一的 $\mathbf{v} \in V$ 滿足 $T(\mathbf{v}) = \mathbf{w}$. 依反函數定義此時 $T^{-1}(\mathbf{w}) = \mathbf{v}$. 所以 T^{-1} 確實定出一個從 W 到 V 的函數. 我們要證明 $T^{-1}: W \to V$ 是一個 linear transformation. 也就是說任取 $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2 \in W$, $r \in \mathbb{F}$, 我們要證明 $T^{-1}(\mathbf{w}_1 + r\mathbf{w}_2) = T^{-1}(\mathbf{w}_1) + rT^{-1}(\mathbf{w}_2)$. 現假設 $T^{-1}(\mathbf{w}_1) = \mathbf{v}_1$, $T^{-1}(\mathbf{w}_2) = \mathbf{v}_2$. 亦即 $T(\mathbf{v}_1) = \mathbf{w}_1$ 且 $T(\mathbf{v}_2) = \mathbf{w}_2$. 要檢查 $T^{-1}(\mathbf{w}_1 + r\mathbf{w}_2)$ 是否等於 $T^{-1}(\mathbf{w}_1) + rT^{-1}(\mathbf{w}_2)$ 就等同於檢查是否 $T^{-1}(\mathbf{w}_1 + r\mathbf{w}_2) = \mathbf{v}_1 + r\mathbf{v}_2$, 也就說是否 $T(\mathbf{v}_1 + r\mathbf{v}_2) = \mathbf{w}_1 + r\mathbf{w}_2$. 然而已知 T 為 linear transformation, 我們有 $T(\mathbf{v}_1 + r\mathbf{v}_2) = T(\mathbf{v}_1) + rT(\mathbf{v}_2) = \mathbf{w}_1 + r\mathbf{w}_2$. 故得證 $T^{-1}(\mathbf{w}_1 + r\mathbf{w}_2) = \mathbf{v}_1 + r\mathbf{v}_2 = T^{-1}(\mathbf{w}_1) + rT^{-1}(\mathbf{w}_2)$, 亦即 T^{-1} 是一個 linear transformation. □

在 Proposition 6.2.4 我們知道當 $T: V \to W$ 是 onto 時會保持 spanning set. 也就是說若 $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ 是 V 的一組 spanning set, 則 $T(\mathbf{v}_1), \ldots, T(\mathbf{v}_n)$ 會是 W 的一組 spanning set. 然而怎樣的 linear transformation 會保持 linearly independent 的關係呢? 我們有以下之定理.

Proposition 6.4.4. 假設 V,W 為 *vector spaces over* $\mathbb{F}$ 且假設 $T: V \to W$ 為 *one-to-one linear transformation.* 則 $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n \in V$ 為 *linearly independent* 若且唯若 $T(\mathbf{v}_1), \ldots, T(\mathbf{v}_n) \in W$ 為 *linearly independent.*

Proof. ($\Rightarrow$) 假設 $\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_n\in V$ 為 linearly independent, 我們希望說明 $T(\mathbf{v}_1),\ldots,T(\mathbf{v}_n)\in W$ 為 linearly independent. 用反證法, 假設 $T(\mathbf{v}_1),\ldots,T(\mathbf{v}_n)\in W$ 為 linearly dependent, 亦即存在 $c_1,\ldots,c_n\in\mathbb{F}$ 不全為 0 使得 $c_1T(\mathbf{v}_1)+\cdots+c_nT(\mathbf{v}_n)=\mathbf{0}$. 現因 T 為 linear, 我們有 $\mathbf{0}=c_1T(\mathbf{v}_1)+\cdots+c_nT(\mathbf{v}_n)=T(c_1\mathbf{v}_1+\cdots+c_n\mathbf{v}_n)$. 因此利用 T 為 one-to-one, 知僅有在 $c_1\mathbf{v}_1+\cdots+c_n\mathbf{v}_n=\mathbf{0}$ 時才有可能使得 $T(c_1\mathbf{v}_1+\cdots+c_n\mathbf{v}_n)=\mathbf{0}$. 故由 $\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_n\in V$ 為 linearly independent 得知 $c_1=\cdots=c_n=0$. 此和 $c_1,\ldots,c_n\in\mathbb{F}$ 不全為 0 的假設相矛盾, 故知 $T(\mathbf{v}_1),\ldots,T(\mathbf{v}_n)\in W$ 為 linearly independent.

($\Leftarrow$) 這個方向的證明不需要 T 為 one-to-one, 僅需要 T 為 linear transformation. 現假設 $T(\mathbf{v}_1),\ldots,T(\mathbf{v}_n)\in W$ 為 linearly independent. 我們用反證法假設 $\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_n\in V$ 為 linearly dependent, 亦即存在 $c_1,\ldots,c_n\in\mathbb{F}$ 不全為 0 使得 $c_1\mathbf{v}_1+\cdots+c_n\mathbf{v}_n=\mathbf{0}$. 現因 T 為 linear, 我們有 $c_1T(\mathbf{v}_1)+\cdots+c_nT(\mathbf{v}_n)=T(c_1\mathbf{v}_1+\cdots+c_n\mathbf{v}_n)=T(\mathbf{0})=\mathbf{0}$. 但由於 $T(\mathbf{v}_1),\ldots,T(\mathbf{v}_n)\in W$ 為 linearly independent, 我們得到 $c_1=\cdots=c_n=0$ 之矛盾. 故得證 $\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_n\in V$ 為 linearly independent. $\square$

當 $T:V\to W$ 是 invertible 的 linear transformation 時, 我們稱 T 為一個 *isomorphism*. 意思是此時 V 和 W 看成 vector space 時有相似的結構而 T 就是保持這個結構的函數. 事實上由 T 為 onto, 我們知道 T 會保持 V 和 W 的 spanning set, 而由 T 為 one-to-one 我們知道 T 會保持 linearly independent 的關係。我們可以將此推廣到更一般的子空間.

Theorem 6.4.5. 設 V,W 為 *vector spaces over* $\mathbb{F}$ 且 $T:V\to W$ 為 *isomorphism.* 若 $\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_k$ 為 V 的 *subspace* V' 的一組 *basis*，則 $T(\mathbf{v}_1),\ldots,T(\mathbf{v}_k)$ 為 $T(V')$ 的一組 *basis*。反之，若 $\mathbf{w}_1,\ldots,\mathbf{w}_l$ 為 W 的 *subspace* W' 的一組 *basis*，則 $T^{-1}(\mathbf{w}_1),\ldots,T^{-1}(\mathbf{w}_l)$ 為 $T^{-1}(W')$ 的一組 *basis*。

Proof. 假設 $\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_k$ 為 V' 的一組 basis. 因 $\{\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_k\}$ 為 V' 的 spanning set, 利用 Proposition 6.2.4 知 $\mathrm{Span}(T(\mathbf{v}_1),\ldots,T(\mathbf{v}_k))=T(V)$, 亦即 $\{T(\mathbf{v}_1),\ldots,T(\mathbf{v}_k)\}$ 為 $T(V)$ 的 spanning set. 又因為 T 為 one-to-one 且 $\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_k$ 為 linearly independent, 利用 Proposition 6.4.4 知 $T(\mathbf{v}_1),\ldots,T(\mathbf{v}_k)\in T(V)$ 為 linearly independent. 故得 $T(\mathbf{v}_1),\ldots,T(\mathbf{v}_k)$ 為 $T(V)$ 的一組 basis.

另一方面，假設 $\mathbf{w}_1,\ldots,\mathbf{w}_l$ 為 W' 的一組 basis. 由於 $T^{-1}:W\to V$ 為 linear transformation (Theorem 6.4.3), 且 $T:V\to W$ 為其 inverse, 故知 T^{-1} 為 one-to-one 且 onto, 也就是說 $T^{-1}:W\to V$ 為 isomorphism. 故和前面一樣的論證知 $T^{-1}(\mathbf{w}_1),\ldots,T^{-1}(\mathbf{w}_l)$ 為 $T^{-1}(W')$ 的一組 basis。 $\square$

假設 V 為 vector space over $\mathbb{F}$ 且 β 為 V 的一組 ordered basis. 令 $T_\beta:V\to\mathbb{R}^n$ 定義為 $T_\beta(\mathbf{v})=[\mathbf{v}]_\beta$, $\forall\mathbf{v}\in V$, 在 Theorem 6.3.10 我們知道 T_β 是 isomorphism. 而在 Proposition 6.3.16 中我們知道若 V,W 為 vector space over $\mathbb{F}$ 且 β,γ 分別為 V,W 的一組 ordered basis, 則對於 linear transformation $T:V\to W$, $\mathbf{v}\in\mathsf{N}(T)$ 若且唯若 $T_\beta(\mathbf{v})\in\mathsf{N}([T]_\beta^\gamma)$, 而 $\mathbf{w}\in\mathsf{R}(T)$ 若且唯若 $T_\gamma(\mathbf{w})\in\mathrm{Col}([T]_\beta^\gamma)$. 因此 T_β 定義出了一個從 $\mathsf{N}(T)$ 到 $\mathsf{N}([T]_\beta^\gamma)$ 的 isomorphism 且 T_γ 定義出了一個從 $\mathsf{R}(T)$ 到 $\mathrm{Col}([T]_\beta^\gamma)$ 的 isomorphism. 利用 Theorem 6.4.5, 我們得到以下的結果.

Corollary 6.4.6. *V,W 為 vector space over $\mathbb{F}$ 且 β,γ 分別為 V,W 的一組 ordered basis. 則 $\{\mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_r\}$ 為 $\mathsf{N}(T)$ 的一組 basis 若且唯若 $\{[\mathbf{v}_1]_\beta,\dots,[\mathbf{v}_r]_\beta\}$ 為矩陣 $[T]_\beta^\gamma$ 的 null space $\mathsf{N}([T]_\beta^\gamma)$ 的一組 basis. 而 $\{\mathbf{w}_1,\dots,\mathbf{w}_s\}$ 為 $\mathsf{R}(T)$ 的一組 basis 若且唯若 $\{[\mathbf{w}_1]_\gamma,\dots,[\mathbf{w}_s]_\gamma\}$ 為矩陣 $[T]_\beta^\gamma$ 的 column space $\mathrm{Col}([T]_\beta^\gamma)$ 的一組 basis. 也因此得到*

$$\mathrm{nullity}(T)=\mathrm{nullity}([T]_\beta^\gamma),\quad \mathrm{rank}(T)=\mathrm{rank}([T]_\beta^\gamma).$$

當 $T:V\to W$ 為 isomorphism 時, 我們已知 T 的 inverse $T^{-1}:W\to V$ 亦為 linear transformation 且 $\dim(V)=\dim(W)$. 此時當 V 和 W 分別選定固定的 ordered basis β,γ 後, 我們有以下的 commutative diagram.

$$\begin{tikzcd}
V \arrow[r, "T"] \arrow[d, "T_\beta"'] & W \arrow[r, "T^{-1}"] \arrow[d, "T_\gamma"] & V \arrow[d, "T_\beta"] \\
\mathbb{F}^n \arrow[r] & \mathbb{F}^n \arrow[r] & \mathbb{F}^n
\end{tikzcd}$$

由於兩端 V 所用的 ordered basis 是一致的, 所以由 $T^{-1}\circ T$ 是 V 到 V 的 identity map $\mathrm{id}:V\to V$. 在 Example 6.3.12, 我們知道 $[\mathrm{id}]_\beta^\beta=I_n$, 故利用 Theorem 6.3.19 推得

$$[T^{-1}]_\gamma^\beta[T]_\beta^\gamma=[T^{-1}\circ T]_\beta^\beta=[\mathrm{id}]_\beta^\beta=I_n.$$

同理, 由於 $T\circ T^{-1}$ 為 W 到 W 的 identity map, 我們得 $[T]_\beta^\gamma[T^{-1}]_\gamma^\beta=I_n$. 得證 $[T^{-1}]_\gamma^\beta$ 為 $[T]_\beta^\gamma$ 的反矩陣.

綜合以上的討論, 我們有以下的結論.

Theorem 6.4.7. 假設 *V,W 為 finite dimensional vector spaced over $\mathbb{F}$* 且令 *β,γ* 分別為 *V,W* 的 *ordered basis.* 設 *$T:V\to W$* 為 *linear transformation.* 則 *T* 為 *isomorphism* 若且唯若 *$[T]_\beta^\gamma$* 為 *invertible matrix.* 又此時 *$T^{-1}:W\to V$* 對應於 *β,γ* 的 *matrix representation* 為

$$[T^{-1}]_\gamma^\beta=([T]_\beta^\gamma)^{-1}.$$

Proof. 由前面的討論已知當 T 為 isomorphism 時其對應於 ordered basis β,γ 的 matrix representation $[T]_\beta^\gamma$ 為 invertible matrix. 我們僅須證明當 $[T]_\beta^\gamma$ 為 invertible matrix 時, $T:V\to W$ 為 isomorphism, 亦即證明 T 為 one-to-one 且 onto. 然而由 $[T]_\beta^\gamma$ 為 invertible matrix, 我們知 $[T]_\beta^\gamma$ 為方陣, 亦即 $\dim(V)=\dim(W)$. 因為 invertible matrix 的 null space 是 $\{\mathbf{0}\}$, 故由 Proposition 6.3.16 知 $\mathsf{N}(T)=\{\mathbf{0}\}$, 亦即 T 為 one-to-one. 最後由 $\dim(V)=\dim(W)$ 以及 Lemma 6.4.1 我們得證 T 亦為 onto. □

Example 6.4.8. 考慮 $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ 定義為 $T(\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix})=\begin{bmatrix}2x_2\\x_1-x_2\\2x_2+x_3\end{bmatrix}$. 我們可得 T 的 standard matrix representation 為 $[T]=\begin{bmatrix}0&2&0\\1&-1&0\\0&2&1\end{bmatrix}$. 在 Example 2.6.8 中我們算出 $[T]^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}&1&0\\\frac{1}{2}&0&0\\-1&0&1\end{bmatrix}$. 故得 $T^{-1}:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ 的定義為 $T^{-1}(\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix})=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}x_1+x_2\\\frac{1}{2}x_1\\-x_1+x_3\end{bmatrix}$. 我們驗

證

$$(T^{-1}\circ T)(\begin{bmatrix} x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}) = T'(\begin{bmatrix} 2x_2\\ x_1-x_2\\ 2x_2+x_3\end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(2x_2)+(x_1-x_2)\\ \frac{1}{2}(2x_2)\\ -(2x_2)+(2x_2+x_3)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix},$$

$$(T\circ T^{-1})(\begin{bmatrix} x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}) = T(\begin{bmatrix} \frac{1}{2}x_1+x_2\\ \frac{1}{2}x_1\\ -x_1+x_3\end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} 2(\frac{1}{2}x_1)\\ (\frac{1}{2}x_1+x_2)-(\frac{1}{2}x_1)\\ 2(\frac{1}{2}x_1)+(-x_1+x_3)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix},$$

得知 T^{-1} 確為 T 的 inverse.

Exercise 6.11. 考慮 linear transformation $T: V\to W$.

(1) 假設 T 為 isomorphism，且 $\beta = (\mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_n)$ 為 V 的一組 ordered basis。試找到 W 的一組 ordered basis γ 使得 $[T]_\beta^\gamma$ 為 identity matrix.

(2) 假設 $\dim(V)=n$, $\dim(W)=m$ 且 $\operatorname{rank}(T)=k$. 證明存在 V, W 的 ordered basis β,γ 使得 $[T]_\beta^\gamma = (a_{ij})$ 為 $m\times n$ matrix 其中 $a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{if } i=j \text{ 且 } 1\le i\le k;\\ 0, & \text{otherwise.}\end{cases}$

Exercise 6.12. 本題是評量線性映射矩陣表法的了解及應用。請完全按照題目要求作答。

考慮 $M_2(\mathbb{R})$ 上的兩組 ordered basis

$$\varepsilon = (\begin{pmatrix} 1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix});$$

$$\alpha = (\begin{pmatrix} 1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}).$$

令 T_1, T_2 分別為 $M_2(\mathbb{R})$ 到 $M_2(\mathbb{R})$ 的線性映射，其中 $T_1(A) = A, T_2(A) = A^{\mathrm{t}}$, $\forall A\in M_2(\mathbb{R})$.

(1) 試分別寫下 $[T_1]_\varepsilon^\alpha$, $[T_2]_\varepsilon^\alpha$, $[T_1]_\alpha^\varepsilon$ 以及 $[T_2]_\alpha^\varepsilon$。

(2) 給定 $c\in\mathbb{R}$，直接利用 T_1+cT_2 函數的定義寫下 $[T_1+cT_2]_\varepsilon^\alpha$ 說明並驗證其與 (1) 所求的哪些矩陣有關。

(3) 利用 $[T_1+cT_2]_\varepsilon^\alpha$ 寫下 T_1+cT_2 為 isomorphism 的充要條件。

(4) 試求矩陣 $[T_1-2T_2]_\varepsilon^\alpha$ 的反矩陣，並說明此反矩陣是哪一個線性映射（與 T_1-2T_2 有關）用哪兩組 ordered basis 的矩陣表示？

(5) 試利用 (4) 所得的反矩陣求 $(T_1-2T_2)^{-1}(A)$, 其中 $A = \begin{pmatrix} 1 & -6\\ 3 & 2\end{pmatrix}$。

(6) 利用合成函數的定義寫下 $[(T_1+2T_2)\circ(T_1-2T_2)]_\varepsilon^\varepsilon$ 並說明且驗證其為 $[T_1-2T_2]_\varepsilon^\alpha$ 左邊乘上哪一個線性映射用哪兩組 ordered basis 的矩陣表示。

(7) 利用 (4) 與 (6) 所提到的矩陣表示，找到 $a,b\in\mathbb{R}$，使得 $(T_1-2T_2)^{-1} = aT_1+bT_2$。