Chapter 7

Linear Operators

在這一章中, 我們探討特別的一種但很常用的 linear transformation, 稱為 linear operator. 它是定義域與對應域相同的 linear transformation. 這一章我們介紹其基本性質，下一章再更進一步探討對角化問題。

7.1. Change of Basis

在這一節中, 我們介紹 change of basis 的概念, 了解到一個 linear operator 換了 ordered basis 後其表現矩陣的關係. 這個概念能幫助我們以後處理矩陣對角化的問題.

我們知道一個 linear transformation, 當我們用不同的 ordered bases 所得的 matrix representation 會不同. 假設 β,β' 為 V 的兩組 ordered bases, 而 γ,γ' 為 W 的兩組 ordered basis. 對於 linear transformation $T:V\to W$, 其對應於這兩對 ordered bases 的 matrix representations $[T]_\beta^\gamma$ 和 $[T]_{\beta'}^{\gamma'}$ 之間會有甚麼關係呢? 首先我們考慮 identity map $\mathrm{id}:V\to V$. 注意雖然是 identity map, 但其 matrix representation 未必會是 identity matrix. 事實上, 當我們定義域和對應域都選同一組 ordered basis $\beta=\{\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_n\}$, 則由於 $\mathrm{id}(\mathbf{v}_i)=\mathbf{v}_i$, 故其 matrix representation 是 identity matrix. 但若定義域是使用 β 這一組 ordered basis, 而對應域選的是 $\beta'=\{\mathbf{v}'_1,\ldots,\mathbf{v}'_n\}$ 這一組 ordered basis, identity map 對應於 β,β' 的 matrix representation $[\mathrm{id}]_\beta^{\beta'}$ 其 i-th column 雖然仍和 $\mathrm{id}(\mathbf{v}_i)=\mathbf{v}_i$ 有關, 不過卻是要將 $\mathbf{v}_i$ 寫成以 $\{\mathbf{v}'_1,\ldots,\mathbf{v}'_n\}$ 為 ordered basis 的坐標表示法 $[\mathbf{v}_i]_{\beta'}$. 所以當 β 和 β' 相異時, $[\mathrm{id}]_\beta^{\beta'}$ 不是 identity matrix. 現對任意 $\mathbf{v}\in V$, 因 $\mathbf{v}$ 對於 β 的坐標表示法為 $[\mathbf{v}]_\beta$, 依 matrix representation 的性質 (Proposition 6.3.14) 可得

$$[\mathrm{id}]_\beta^{\beta'}[\mathbf{v}]_\beta=[\mathrm{id}(\mathbf{v})]_{\beta'}=[\mathbf{v}]_{\beta'}.$$

也就是說, 矩陣 $[\mathrm{id}]_\beta^{\beta'}$ 可以將 V 中元素對於 β 的坐標表示轉換成對於 β' 的坐標表示, 也因此我們稱 $[\mathrm{id}]_\beta^{\beta'}$ 為 *change-of-basis matrix.*

要注意 $\mathrm{id}:V\to V$ 是 isomorphism, 所以由 Theorem 6.4.7 我們得 $[\mathrm{id}]_\beta^{\beta'}$ 為 invertible 且

$$([\mathrm{id}]_\beta^{\beta'})^{-1}=[\mathrm{id}^{-1}]_{\beta'}^{\beta}=[\mathrm{id}]_{\beta'}^{\beta} \tag{7.1}$$

也就是說將 β 的坐標表示轉換成對於 β' 的坐標表示的 change-of-basis matrix 的 inverse 就是 β' 的坐標表示轉換成對於 β 的坐標表示的 change-of-basis matrix.

我們回到原先的問題, 假設 $T:V\to W$ 為 linear transformation 且 β,β' 為 V 的兩組 ordered bases, 而 γ,γ' 為 W 的兩組 ordered basis. 我們要探討 $[T]_\beta^\gamma$ 和 $[T]_{\beta'}^{\gamma'}$ 之間的關係. 由於 $\mathrm{id}_V:V\to V$, $T:V\to W$ 和 $\mathrm{id}_W:W\to W$ 之合成 $\mathrm{id}_W\circ T\circ\mathrm{id}_V:V\to W$ 仍為 $T:V\to W$, 所以由 Theorem 6.3.19 (2) 得

$$[\mathrm{id}_W]_\gamma^{\gamma'}[T]_\beta^\gamma[\mathrm{id}_V]_{\beta'}^\beta=[T]_{\beta'}^{\gamma'}.$$

這就是所謂的 change-of basis formula, 我們將之完整敘述如下.

Theorem 7.1.1 (Change-of-basis Formula)**.** 假設 $T:V\to W$ 為 *linear transformation* 且 β,β' 為 V 的兩組 *ordered bases,* 而 γ,γ' 為 W 的兩組 *ordered basis,* 則存在 *invertible matrix* P,Q 使得 $[T]_{\beta'}^{\gamma'}=Q([T]_\beta^\gamma)P$, 其中 P 為將 β' 的坐標表示轉換成 β 的坐標表示的 *change-of-basis matrix* $[\mathrm{id}_V]_{\beta'}^\beta$, 而 Q 為將 γ 的坐標表示轉換成 γ' 的坐標表示的 *change-of-basis matrix* $[\mathrm{id}_W]_\gamma^{\gamma'}$.

Example 7.1.2. 在 Example 6.3.13 中我們考慮 linear transformation $T:P_2(\mathbb{R})\to P_3(\mathbb{R})$, 其中 $T(p(x))=(x+1)p(x-1)$, $\forall\, p(x)\in P_2(\mathbb{R})$. 另外我們考慮 $P_2(\mathbb{R})$ 的兩組 ordered bases $\varepsilon=(x^2,x,1)$, $\beta=(p_1(x),p_2(x),p_3(x))$ 其中

$$p_1(x)=\frac{1}{2}(x^2-x),\quad p_2(x)=-x^2+1,\quad p_3(x)=\frac{1}{2}(x^2+x)$$

以及 $P_3(\mathbb{R})$ 的兩組 ordered bases $\varepsilon'=(x^3,x^2,x,1)$, $\beta'=(q_1(x),q_2(x),q_3(x),q_4(x))$ 其中

$$q_1(x)=\frac{-x^3+3x^2-2x}{6},q_2(x)=\frac{x^3-2x^2-x+2}{2},q_3(x)=\frac{-x^3+x^2+2x}{2},q_4(x)=\frac{x^3-x}{6}.$$

在 Example 6.3.13 中我們得到

$$[T]_\varepsilon^{\varepsilon'}=\begin{bmatrix}1&0&0\\-1&1&0\\-1&0&1\\1&-1&1\end{bmatrix},\quad [T]_\beta^{\beta'}=\begin{bmatrix}0&0&0\\1&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{bmatrix}.$$

因 $[p_1(x)]_\varepsilon=\begin{bmatrix}1/2\\-1/2\\0\end{bmatrix}$, $[p_2(x)]_\varepsilon=\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix}$, $[p_3(x)]_\varepsilon=\begin{bmatrix}1/2\\1/2\\0\end{bmatrix}$ 依定義 β 到 ε 的 change-of-basis matrix 為 $[\mathrm{id}_{P_2(\mathbb{R})}]_\beta^\varepsilon=\begin{bmatrix}1/2&-1&1/2\\-1/2&0&1/2\\0&1&0\end{bmatrix}$. 另外若 $x^3=c_1q_1(x)+c_2q_2(x)+c_3q_3(x)+c_4q_4(x)$, 則因 $q_1(-1)=1,q_2(-1)=q_3(-1)=q_4(-1)=0$, 將 $x=-1$ 代入前式得 $c_1=-1$, 同理我們可得 $c_2=0,c_3=1,c_4=8$, 亦即 $[x^3]_{\beta'}=\begin{bmatrix}-1\\0\\1\\8\end{bmatrix}$. 用同樣方法求 $x^2,x,1$ 對於 β' 的坐標表示法, 我們得 ε' 到 β' 的 change-of-basis matrix 為 $[\mathrm{id}_{P_3(\mathbb{R})}]_{\varepsilon'}^{\beta'}=\begin{bmatrix}-1&1&-1&1\\0&0&0&1\\1&1&1&1\\8&4&2&1\end{bmatrix}$. 我們也可以

先寫下 β' 到 ε' 的 change-of-basis matrix $[\mathrm{id}_{P_3(\mathbb{R})}]_{\beta'}^{\varepsilon'} = \begin{bmatrix} -1/6 & 1/2 & -1/2 & 1/6 \\ 1/2 & -1 & 1/2 & 0 \\ -1/3 & -1/2 & 1 & -1/6 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ 再取 inverse 得 $[\mathrm{id}_{P_3(\mathbb{R})}]_{\varepsilon'}^{\beta'}$. 最後我們驗算

$$[\mathrm{id}_{P_3(\mathbb{R})}]_{\varepsilon'}^{\beta'}\,[T]_{\varepsilon}^{\varepsilon'}\,[\mathrm{id}_{P_2(\mathbb{R})}]_{\beta}^{\varepsilon} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 8 & 4 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \\ \frac{-1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = [T]_{\beta}^{\beta'}.$$

前面提過, 我們經常談論的一種 linear transformation 是其定義域及對應域為相同的 vector space. 這樣的 linear transformation 我們特別稱之為 *linear operator*. 關於 linear operator 我們通常對於定義域及對應域會選同樣的一組 ordered basis. 當定義域和對應域都選同樣的 ordered basis β, 我們將原本 matrix representation 的表示法 $[T]_{\beta}^{\beta}$ 省略寫成 $[T]_{\beta}$. 此時利用 Theorem 7.1.1, 我們得以下之結果.

Corollary 7.1.3. *假設 $T: V \to V$ 為 linear transformation 且 β, β' 為 V 的兩組 ordered bases. 則存在 invertible matrix P 使得 $[T]_{\beta'} = P^{-1}([T]_{\beta})P$, 其中 P 為將 β' 的坐標表示轉換成 β 的坐標表示的 change-of-basis matrix $[\mathrm{id}_V]_{\beta'}^{\beta}$.*

Proof. 考慮 Theorem 7.1.1 其中 $W = V$, $\gamma = \beta$ 以及 $\gamma' = \beta'$ 的情形. 此時 $Q = [\mathrm{id}_V]_{\beta}^{\beta'}$ 由式子 (7.1), 知 $Q = ([\mathrm{id}_V]_{\beta'}^{\beta})^{-1} = P^{-1}$, 得證本定理. □

給定一個 $n \times n$ matrix A 我們知道它可以代表某一個 dimension 為 n 的 vector space V 上的 linear operator $T: V \to V$, 對於 V 的某一組 ordered basis 的 matrix representation. 若 P 為 $n \times n$ invertible matrix, 則我們稱 $B = P^{-1}AP$ 和 A 為 *similar*. 意味著我們也可將 B 視為 $T: V \to V$ 的一個 matrix representation 只是選取 V 不同的 ordered basis 而已.

有時一個 linear operator, 若選取夠好的一組 ordered basis, 我們可以得到更好的 matrix representation 以至於更容易了解這個 linear transformation. 例如 Orthonormal basis 也可幫助我們處理 linear operator 的問題. 考慮 $T: V \to V$ 為 linear operator. 當我們給定 $\beta = (\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n)$ 為 V 的 ordered basis, 我們便可得到 T 對 β 的表現矩陣 $A = [T]_{\beta}$. 其中 A 的 j-th column, 就是 $T(\mathbf{v}_j)$ 用 β 寫下的坐標. 也就是說若 $T(\mathbf{v}_j) = c_1\mathbf{v}_1 + \cdots + c_n\mathbf{v}_n$, 則 A 的 j-th column 就是 $\begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}$. 特別的, 當 $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ 是 V 的一組 orthonormal basis, 我們很容易將 $T(\mathbf{v}_j)$ 寫成 $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ 的線性組合, 事實上 Proposition 4.3.6 告訴我們 $T(\mathbf{v}_j) = c_1\mathbf{v}_1 + \cdots + c_n\mathbf{v}_n$, 其中 $c_i = \langle T(\mathbf{v}_j), \mathbf{v}_i \rangle = \langle \mathbf{v}_i, T(\mathbf{v}_j) \rangle$. 也就是說 A 的 j-th column 其 i-th entry 為 $c_i = \langle \mathbf{v}_i, T(\mathbf{v}_j) \rangle$, 因此 $[T]_{\beta}$ 的 (i,j)-th entry 就是 $\langle \mathbf{v}_i, T(\mathbf{v}_j) \rangle$.

Proposition 7.1.4. *假設 V 為 inner product space 且 $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ 為 V 的一組 orthonormal basis. 若 $T: V \to V$ 為 linear operator 且考慮 V 的 ordered basis $\beta = (\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n)$, 則 T 用 β 所得的 matrix representation $[T]_{\beta}$ 其 (i,j)-th entry 為 $\langle \mathbf{v}_i, T(\mathbf{v}_j) \rangle$.*

Question 7.1. 在 *Proposition 7.1.4* 中若 *ordered basis* $\beta = (\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$ 是由 *orthogonal basis* 所形成, 則 $[T]_\beta$ 的 (i,j)*-th entry* 應為何?

另外有的 linear operator 可以找到好的基底使其 matrix representation 為對角矩陣. 有關於這個課題, 等以後談到對角化時我們再進一步探討. 我們先看一個簡單的例子.

Example 7.1.5. 考慮 linear operator $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ 定義為 $T(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}) = \frac{1}{25}\begin{bmatrix} 9x+12y \\ 12x+16y \end{bmatrix}$. 若利用標準基底 $\varepsilon = (\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix})$ 我們得 $[T]_\varepsilon = \frac{1}{25}\begin{bmatrix} 9 & 12 \\ 12 & 16 \end{bmatrix}$. 然而若用 $\beta = (\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -4 \\ 3 \end{bmatrix})$ 這組 ordered basis 可由 $T(\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$, $T(\begin{bmatrix} -4 \\ 3 \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, 得 $[T]_\beta = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. 我們很容易由

$$[T \circ T]_\beta = ([T]_\beta)([T]_\beta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = [T]_\beta$$

推得 $T \circ T = T$. 事實上從 β 這組 ordered basis 我們很容易看出 T 就是將 $\mathbb{R}^2$ 上的向量對 $\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$ 的投影. 另外令 $P = [\mathrm{id}]_\beta^\varepsilon = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$, 我們得

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = [T]_\beta = ([\mathrm{id}]_\varepsilon^\beta)([T]_\varepsilon)([\mathrm{id}]_\beta^\varepsilon) = P^{-1}(\frac{1}{25}\begin{bmatrix} 9 & 12 \\ 12 & 16 \end{bmatrix})P,$$

所以 $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ 和 $\frac{1}{25}\begin{bmatrix} 9 & 12 \\ 12 & 16 \end{bmatrix}$ 為 similar.

Corollary 7.1.3 告訴我們，一個 linear operator 選取不同的 ordered basis, 其表現矩陣會有 similar 的關係. 反過來, 當給定 $A \in \mathsf{M}_{n\times n}(\mathbb{F})$, 我們可以考慮 $L_A : \mathbb{F}^n \to \mathbb{F}^n$, 其定義為 $L_A(\mathbf{v}) = A\mathbf{v}$, $\forall \mathbf{v} \in \mathbb{F}^n$ 這一個 linear operator. 此時 L_A 對 $\mathbb{F}^n$ 的 standard ordered basis $\varepsilon = (\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$ 的表現矩陣 $[L_A]_\varepsilon$ 就是 A. 現若 $B \in \mathsf{M}_{n\times n}(\mathbb{F})$ 且 B 和 A similar, 亦即存在 invertible matrix U 滿足 $B = U^{-1}AU$. 現考慮 ordered basis $\beta = (\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$, 其中 $\mathbf{v}_i$ 是 U 的 i-th column, 則依定義 $U = [\mathrm{id}_{\mathbb{F}^n}]_\beta^\varepsilon$, 也因此由 Corollary 7.1.3 知 B 是 L_A 用 β 所得的表現矩陣, 即 $B = [L_A]_\beta$. 從這裡我們知道, 以後要探討兩個相似矩陣的問題, 我們都可以將之視為是同一個 linear operator 利用不同的 ordered basis 所得的表現矩陣.

7.2. Eigenvector

Linear operators 由於定義域和對應域相同，很自然的會探討其迭代（iterate）的問題，亦即自己和自己的合成。由於迭代後向量間的變換有的複雜、有的簡單，eigenvector 就是在迭代過程中變換最有規律的向量。

假設 V 是一個 vector space over $\mathbb{F}$ 且 $T : V \to V$ 是一個 linear operator. 我們令 $T^2 = T \circ T$, $T^3 = T \circ T^2$，如此一直迭代下去，即令 $T^k = T \circ T^{k-1}$。給定 $\mathbf{v} \in V$，我們可以探討 $T(\mathbf{v})$, $T^2(\mathbf{v}) = T(T(\mathbf{v}))$, $T^3(\mathbf{v})\dots$。一般來說當 k 越大時, 計算 $T^k(\mathbf{v})$ 就越困難. 不過在一種特殊其況, 即當存在 $\lambda \in \mathbb{F}$ 使得 $A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$ 時, 我們有 $T^2(\mathbf{v}) = T(T(\mathbf{v})) = T(\lambda\mathbf{v}) = \lambda T(\mathbf{v}) = \lambda^2\mathbf{v}$. 同理我們會有 $T^3(\mathbf{v}) = \lambda^3\mathbf{v}, \dots, T^k(\mathbf{v}) = \lambda^k\mathbf{v}$. 也就是說在這種情況之下, 就很容易計算出 $T^k(\mathbf{v})$. 因此我們對於怎樣的 $\mathbf{v}$ 會存在 $\lambda \in \mathbb{F}$ 使得 $A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$ 特別有興趣. 所以有以下的定義.

Definition 7.2.1. 假設 V 是一個 vector space over $\mathbb{F}$ 且 $T: V \to V$ 是一個 linear operator. 若對非零向量 $\mathbf{v} \in V$, 存在 $\lambda \in \mathbb{F}$ 滿足 $T(\mathbf{v}) = \lambda\mathbf{v}$, 則稱 $\mathbf{v}$ 為 T 的一個 *eigenvector*, 且 λ 為其 *eigenvalue.*

注意, 依定義 T 的 eigenvector 一定是非零向量（這是因為 $T(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$，所以 $\mathbf{0}$ 沒有什麼特殊之處）。又若 $\mathbf{v}$ 是 T 的一個 eigenvector, 且 $\lambda, \lambda' \in \mathbb{F}$ 滿足 $T(\mathbf{v}) = \lambda\mathbf{v} = \lambda'\mathbf{v}$, 則由 $(\lambda - \lambda')\mathbf{v} = \mathbf{0}$ 以及 $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$, 可得 $\lambda = \lambda'$. 因此對於 T 的一個 eigenvector $\mathbf{v}$ 一定有也僅有一個實數 λ 會滿足 $T(\mathbf{v}) = \lambda\mathbf{v}$. 此時我們稱 eigenvector $\mathbf{v}$ 所對應的 eigenvalue 為 λ.

Question 7.2. 假設 $T: V \to V$ 為 *linear operator* 且 $\mathbf{v} \in N(T)$ 滿足 $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$. 是否 $\mathbf{v}$ 為 *eigenvector*？其所對應的 *eigenvalue* 為何？

Example 7.2.2. 考慮 Linear operator $T: P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ 定義為

$$T(f(x)) = f(x) + (x+1)f'(x), \quad \forall f(x) \in P_2(\mathbb{R}).$$

考慮常數多項式 $g(x) = 1$，此時 $T(g(x)) = 1 = g(x)$，所以 1 是 T 的一個 eigenvector 且其 eigenvalue 為 1。另外考慮 $h(x) = x^2 + 2x + 1$, 則

$$T(h(x)) = (x^2 + 2x + 1) + (x+1)(2x+2) = 3(x^2 + 2x + 1) = 3h(x).$$

故 $x^2 + 2x + 1$ 是 T 的一個 eigenvector 且其 eigenvalue 為 3.

不過 $T(x^2 + 2x + 2) = 3x^2 + 6x + 4$，所以 $x^2 + 2x + 2$ 不是 T 的 eigenvector。 $\sharp$

首先我們看一些 eigenvector 和 eigenvalue 的性質.

Proposition 7.2.3. 假設 V 是一個 *vector space over* $\mathbb{F}$ 且 $T: V \to V$ 是一個 *linear operator.* 又假設 $\mathbf{v}, \mathbf{v}'$ 為 T 的 *eigenvectors* 且其 *eigenvalue* 皆為 $\lambda \in \mathbb{F}$.

(1) 若 $c \in \mathbb{F}$ 且 $c \neq 0$, 則 $c\mathbf{v}$ 亦為 T 的一個 *eigenvalue* 為 λ 的 *eigenvector.*

(2) 若 $\mathbf{v} + \mathbf{v}' \neq 0$, 則 $\mathbf{v} + \mathbf{v}'$ 亦為 T 的一個 *eigenvalue* 為 λ 的 *eigenvector.*

Proof. 依假設我們知道 $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ 且 $T(\mathbf{v}) = \lambda\mathbf{v}$ 以及 $T(\mathbf{v}') = \lambda\mathbf{v}'$.

(1) 令 $\mathbf{w} = c\mathbf{v}$, 由於 $c \neq 0$ 且 $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$, 我們知 $\mathbf{w} \neq \mathbf{0}$. 現考慮

$$T(\mathbf{w}) = T(c\mathbf{v}) = cT(\mathbf{v}) = c(\lambda\mathbf{v}) = \lambda(c\mathbf{v}) = \lambda\mathbf{w}.$$

得證 $\mathbf{w} = c\mathbf{v}$ 為 T 的一個以 λ 為 eigenvalue 的 eigenvector.

(2) 令 $\mathbf{u} = \mathbf{v} + \mathbf{v}'$. 現考慮

$$T(\mathbf{u}) = T(\mathbf{v} + \mathbf{v}') = T(\mathbf{v}) + T(\mathbf{v}') = \lambda\mathbf{v} + \lambda\mathbf{v}' = \lambda(\mathbf{v} + \mathbf{v}') = \lambda\mathbf{u}.$$

得證 $\mathbf{u} = \mathbf{v} + \mathbf{v}'$ 為 T 的一個以 λ 為 eigenvalue 的 eigenvector.

$\square$

Question 7.3. $T: V \to V$ 是一個 *linear operator* 且 $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in V$ 皆為 T 的一個 *eigenvalue* 為 λ 的 *eigenvector.* 證明若 $\mathbf{w} \in \operatorname{Span}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$ 且 $\mathbf{w} \neq \mathbf{0}$, 則 $\mathbf{w}$ 也是 T 的一個 *eigenvalue* 為 λ 的 *eigenvector.*

要注意, Question 7.3 並不是說任意兩個 eigenvector 的線性組合仍為 eigenvector. 必須是它們所對應的 eigenvalue 是一樣的才會對. 例如在 Example 7.2.2 中雖然 1 和 x^2+2x+1 都是 T 的 eigenvector, 但 $x^2+2x+2=(x^2+2x+1)+1$ 就不是 A 的 eigenvector. 另外即使 eigenvalue 一樣，但仍不能說它們的線性組合仍為 eigenvector，因為要排除零向量。

要怎樣找一個 linear operator $T: V \to V$ 的 eigenvalues 和 eigenvectors 呢？我們提過有關 linear transformation 的問題都可以轉換成 matrix 的問題, 反之亦然。通常都是透過 T 的表現矩陣來找到 T 的 eigenvalues 和 eigenvectors。回顧一下，若 $\dim(V)=n$, 且 β 是 V 的一組 ordered basis, 則 T 利用這組 ordered basis 所得的表現矩陣 $[T]_\beta$ 會是一個 $n \times n$ matrix. 接著，我們定義一個方陣的 eigenvalue 和 eigenvector。

Definition 7.2.4. 假設 $A \in \mathsf{M}_{n\times n}(\mathbb{F})$. 若對於非零向量 $\mathbf{v} \in \mathbb{F}^n$, 存在 $\lambda \in \mathbb{F}$ 使得 $A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$, 則稱 $\mathbf{v}$ 為 A 的一個 *eigenvector*, 而此 λ 稱為 A 的一個 *eigenvalue.*

注意, 依定義 A 的 eigenvector 一定是非零向量。也因此和 linear operator 一樣，方陣 A 的一個 eigenvector $\mathbf{v}$ 一定有也僅有一個 $\lambda \in \mathbb{F}$ 會滿足 $A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$.

Example 7.2.5. 考慮

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

我們有

$$A\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \end{bmatrix} = -2\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = -2\mathbf{v}_1.$$

所以 $\mathbf{v}_1$ 是 A 的一個 eigenvector, 而 -2 是其對應的 eigenvalue. 同樣的

$$A\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 \\ 20 \end{bmatrix} = 5\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} = 5\mathbf{v}_2.$$

所以 $\mathbf{v}_2$ 是 A 的一個 eigenvector, 而 5 是其對應的 eigenvalue. 然而

$$A\mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 \\ 22 \end{bmatrix} \notin \operatorname{Span}(\begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}).$$

所以 $\mathbf{v}_3$ 不是 A 的一個 eigenvector.

Linear operator $T: V \to V$ 和其表現矩陣，即方陣 $[T]_\beta$ 的 eigenvalue 和 eigenvector 會有甚麼關係呢？假設 $\beta = (\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n)$, 而 $\begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} \in \mathbb{F}^n$ 是 $[T]_\beta$ 的一個 eigenvector 且其 eigenvalue 為 λ, 此時我們有

$$[T]_\beta \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda c_1 \\ \vdots \\ \lambda c_n \end{bmatrix}.$$

若令 $\mathbf{v} = c_1\mathbf{v}_1 + \cdots + c_n\mathbf{v}_n$, 回顧一下在 Proposition 6.3.14 中告訴我們這表示 $T(\mathbf{v})$ 用 β 這組 ordered basis 的坐標表示應該是 $\begin{bmatrix} \lambda c_1 \\ \vdots \\ \lambda c_n \end{bmatrix}$. 也就是說

$$T(\mathbf{v}) = \lambda c_1\mathbf{v}_1 + \cdots + \lambda c_n\mathbf{v}_n = \lambda(c_1\mathbf{v}_1 + \cdots + c_n\mathbf{v}_n) = \lambda\mathbf{v}.$$

反之, 若 $\mathbf{v} = c_1\mathbf{v}_1 + \cdots + c_n\mathbf{v}_n \in V$ 滿足 $T(\mathbf{v}) = \lambda\mathbf{v}$, 則由 Proposition 6.3.14 知 $\begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} \in \mathbb{F}^n$ 是 $[T]_\beta$ 的一個 eigenvector 且其 eigenvalue 為 λ。也就是說當我們了解一個 linear operator 其表現矩陣的 eigenvalues 和 eigenvectors 就等同於掌握了這個 linear operator 的 eigenvalues 和 eigenvectors.

在 Proposition 7.2.3, 我們提到關於 linear operator 的 eigenvalue 和 eigenvector 的性質. 這性質對方陣當然也是對的, 我們有以下的性質，就不再證明了.

Proposition 7.2.6. 假設 $A \in \mathsf{M}_{n\times n}(\mathbb{F})$ 以及 $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in \mathbb{F}^n$ 為 A 的 *eigenvectors* 且其 *eigenvalue* 皆為 $\lambda \in \mathbb{F}$. 若 $c_1, c_2 \in \mathbb{F}$ 且 $c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 \neq \mathbf{0}$, 則 $c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2$ 也會是 A 的一個以 λ 為 *eigenvalue* 的 *eigenvector.*

最後我們要強調, 在求 linear operator $T: V \to V$ 的 eigenvalue 和 eigenvector 時, 不必擔心選取 V 的 ordered basis 為何. 這是因為 eigenvalue 和 eigenvector 的定義和 T 有關, 而和 V 的 ordered basis 無關. 所以即使選取 V 的 ordered basis 不同會造成不同的矩陣表示, 所得的 eigenvalue 和 eigenvector 都可得到同樣 T 的 eigenvalue 和 eigenvector. 不過再次提醒：使用表現矩陣來求 eigenvalue 和 eigenvector 時, 定義域和對應域都要使用同樣的 ordered basis, 否則這樣的表現矩陣所求得的 eigenvalue 和 eigenvector 和 T 的 eigenvalue 和 eigenvector 的定義是不吻合的.

我們已了解要找一個 linear operator $T: V \to V$ 的 eigenvalue 和 eigenvector，只要任取 V 的一組 ordered basis β, 並考慮其 matrix representation $[T]_\beta$ 的 eigenvalue 和 eigenvector 就可以還原成 T 的 eigenvalue 和 eigenvector 了。下一節我們便專注於如何求一個方陣的 eigenvalue 和 eigenvector。

Exercise 7.1. 考慮 linear operator $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ 定義為 $T(x,y,z) = (y,-x,z)$. 令 A 為 T 的 standard matrix representation.

(1) 令 $Q = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$. 試寫出 $\mathbb{R}^3$ 的 ordered basis γ, 使得 T 的 matrix representation related to γ 是 $Q^{-1}AQ$.

(2) 令 β 為 $\mathbb{R}^3$ 的 ordered basis $(1,-1,1), (1,-2,2), (1,-2,1)$ 且令 B 為 T 的 matrix representation related to β. 試求 B，並寫出矩陣 P 使得 $A = P^{-1}BP$.

Exercise 7.2. 假設 A,B 為 similar 的 n 階方陣.

(1) 證明 A^{t}, B^{t} 也是 similar.

(2) 證明若 A 為 invertible, 則 B 亦為 invertible. 並證明此時對任意 $k \in \mathbb{N}$, A^{-k} 和 B^{-k} 為 similar.

Exercise 7.3. 假設 $T: V \to V$ 為 linear operator，考慮多項式 $f(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$，定義 linear operator $f(T) = a_n T^n + \cdots + a_1 T + a_0 \mathrm{id}_V$。假設 $\mathbf{v} \in V$ 為 T 的一個 eigenvalue 為 λ 的 eigenvector. 證明 $\mathbf{v}$ 為 $f(T)$ 的 eigenvector, 並說明其對應的 eigenvalue 為何.

Exercise 7.4. 考慮 linear operator $T: V \to V$, 且 $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ 為 T 的 eigenvectors 其對應的 eigenvalues 分別為 λ_1, λ_2. 已知 $\lambda_1 \neq \lambda_2$.

(1) 證明 $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ 為 linearly independent.

(2) 證明若 $c_1, c_2 \in \mathbb{F}$ 且 $c_1 \neq 0, c_2 \neq 0$, 則 $c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2$ 不會是 T 的 eigenvector.

(3) 證明若存在 $c_1, c_2 \in \mathbb{F}$ 且 $c_1 \neq 0, c_2 \neq 0$ 使得 $c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2$ 為 T^2 的 eigenvector, 則 $\lambda_1 = -\lambda_2$. 並說明對於 T^2 此 eigenvector $c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2$ 的 eigenvalue 為何.

Exercise 7.5. 考慮 $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ 定義為 $T(x,y,z) = (x+2y+z, y, x+3y+z)$. 令

$$\mathbf{v}_1 = (-1,0,1), \mathbf{v}_2 = (3,-1,2), \mathbf{v}_3 = (1,0,1).$$

(1) 說明 $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ 皆為 T 的 eigenvector 並決定其對應的 eigenvalue.

(2) 令 $\mathbf{v} = (1,-1,2)$, 將 $\mathbf{v}$ 寫成 $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ 的線性組合, 並求 $T^3(\mathbf{v})$.

(3) 考慮 ordered basis $\beta = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$ 以及 standard ordered basis ε. 試寫下表現矩陣 $[T]_\varepsilon$ 以及 $[T]_\beta$.

(4) 試寫下將 $[T]_\varepsilon$ 對角化成 $[T]_\beta$ 之間的關係式, 即找出互為 inverse 的矩陣 P, Q 使得 $Q[T]_\varepsilon P = [T]_\beta$. 並驗證之.

Exercise 7.6. 考慮 $T_1, T_2: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ 分別為對平面 $x - 2y + z = 0$ 的投影 (projection) 以及鏡射 (reflection) 的 linear operator.

(1) 利用投影及鏡射的特性找出 $\mathbb{R}^3$ 的一組 basis $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ 使其皆為 T_1, T_2 的 eigenvectors (Hint: 可考慮 $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ 互相垂直).

(2) 令 β 為 ordered basis $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$ 試寫下表現矩陣 $[T_1]_\beta$, $[T_2]_\beta$.

(3) 利用 (b) 的結果寫出 T_1, T_2 在 standard ordered basis 之下的表現矩陣.