Chapter 8

Diagonalizable Matrices and Their Applications

在這一章中, 我們探討 $n \times n$ matrix 對角化的問題以及其相關應用.

8.1. Diagonalizability

在這一節，我們將定義何謂可對角化（*diagonalizable*）的 linear operator 以及方陣，並探討如何判斷一個方陣為可對角化，進而得知一個 linear operator 是否可對角化。

對於一個 linear operator 為 *diagonalizable* (可對角化) 的定義如下：

Definition 8.1.1. 假設 $T : V \to V$ 是一個 linear operator. 若 V 中存在一組 basis $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ 其中每個 $\mathbf{v}_i$ 皆為 T 的 eigenvectors, 則稱 T 為 *diagonalizable* (可對角化).

為何這樣子的 linear operator 會稱為 diagonalizable 呢？因為如果 $\beta = (\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n)$ 是 V 的一組 ordered basis 且 $\mathbf{v}_i$ 皆為 T 的 eigenvector. 假設 λ_i 就是 $\mathbf{v}_i$ 所對應的 eigenvalue, 亦即 $T(\mathbf{v}_i) = \lambda_i \mathbf{v}_i$, $\forall i \in \{1, \ldots, n\}$. 此時考慮 T 利用 β 所得的 matrix representation $[T]_\beta$. 回顧一下 $[T]_\beta$ 的 1-st column 是 $T(\mathbf{v}_1)$ 用 β 寫下的坐標表示, 即 $\begin{bmatrix} \lambda_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \lambda_1 \mathbf{e}_1$. 而對一般的 $i \in \{1, \ldots, n\}$, $[T]_\beta$ 的 i-th column 就是 $T(\mathbf{v}_i) = \lambda_i \mathbf{v}_1$ 用 β 寫下的坐標表示, 即 $\lambda_i \mathbf{e}_i$. 也因此 $[T]_\beta$ 就是 $\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_n \end{bmatrix}$ 這樣的 diagonal matrix. 換言之，$T : V \to V$ 為 diagonalizable 表示存在 V 的一組 ordered basis β 使得 T 利用 β 所得的表現矩陣 $[T]_\beta$ 為 diagonal matrix（對角矩陣）。

如何判斷一個 linear operator 是否 diagonalizable 呢？因為要找 eigenvectors，當然要利用任一組 ordered basis 所決定的表現矩陣來處理。由方陣與 linear operator 的關係，我們自然有以下對於方陣的定義：

Definition 8.1.2. 假設 $A \in \mathsf{M}_{n\times n}(\mathbb{F})$. 若存在 $\mathbb{F}^n$ 的一組 basis $\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_n$ 其中每個 $\mathbf{v}_i$ 皆為 A 的 eigenvectors, 則稱 A 為 *diagonalizable* （可對角化）。

從矩陣觀點，n 階方陣 A 稱為 diagonalizable 表示有一組 $\mathbb{F}^n$ 的 basis $\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}\in\mathbb{F}^n$ 皆為 A eigenvalues 分別為 $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$ 的 eigenvectors，亦即 $A\mathbf{v}_1=\lambda_1\mathbf{v}_1,\ldots,A\mathbf{v}_n=\lambda_n\mathbf{v}_n$. 此時由矩陣乘法的定義我們有

$$A\begin{bmatrix} | & | & & | \\ \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \cdots & \mathbf{v}_n \\ | & | & & | \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} | & | & & | \\ A\mathbf{v}_1 & A\mathbf{v}_2 & \cdots & A\mathbf{v}_n \\ | & | & & | \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} | & | & & | \\ \lambda_1\mathbf{v}_1 & \lambda_2\mathbf{v}_2 & \cdots & \lambda_n\mathbf{v}_n \\ | & | & & | \end{bmatrix}.$$

另一方面若考慮 (i,i)-th entry 為 λ_i 的 $n\times n$ diagonal matrix D（即對角線第 i 個位置為 λ_i 而對角線外其餘位置皆為 0），則我們有

$$\begin{bmatrix} | & | & & | \\ \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \cdots & \mathbf{v}_n \\ | & | & & | \end{bmatrix} D = \begin{bmatrix} | & | & & | \\ \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \cdots & \mathbf{v}_n \\ | & | & & | \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} | & | & & | \\ \lambda_1\mathbf{v}_1 & \lambda_2\mathbf{v}_2 & \cdots & \lambda_3\mathbf{v}_n \\ | & | & & | \end{bmatrix}.$$

因此若令 $P=\begin{bmatrix} | & | & & | \\ \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \cdots & \mathbf{v}_n \\ | & | & & | \end{bmatrix}$, 則我們有 $AP=PD$. 現又因 C 的 column 之間為 linearly independent 且有 n 個 column, 我們得 P 的 rank 為 n, 因此由 P 為 $n\times n$ matrix 得知 P 為 invertible（參見 Theorem 2.6.2）. 因此我們可將 $AP=PD$ 改寫成 $D=P^{-1}AP$. 反之, 若存在一個 $n\times n$ invertible matrix 使得 $P^{-1}AP$ 為 diagonal matrix D, 則因 P 為 $n\times n$ invertible matrix, 所以 P 的 n 個 column vectors 形成 $\mathbb{F}^n$ 的一組 basis. 又因為 $AP=PD$, 由上面矩陣乘法的性質知 P 的 i-th column 就會是 A 以 D 的 (i,i)-th entry 為 eigenvalue 的 eigenvector. 所以 P 的 column vectors 就是 $\mathbb{F}^n$ 的一組 basis 且為 A 的 eigenvectors, 也就是說 A 為 diagonalizable. 前面曾經提過, 形如 $P^{-1}AP$ (其中 P 為 $n\times n$ invertible matrix) 這樣的 matrix 就稱為和 A 為 similar 的 matrix. 因此由這裡的討論, 我們知道 A 為 diagonalizable 就等同於 A 和一個 diagonal matrix 是 similar. 這也就是 diagonalizable 這個名稱的原因.

要如何知道 $A\in\mathsf{M}_{n\times n}(\mathbb{F})$ 是否為 diagonalizable 呢? 從其定義, 我們知道它必須要有夠多的 eigenvectors. 假設 A 的 characteristic polynomial 可以在 $\mathbb{F}$ 中分解成以下形式 $p_A(t)=(-1)^n(t-\lambda_1)^{a_1}\cdots(t-\lambda_k)^{a_k}h(t)$, 其中 λ_i 皆相異且 $h(t)$ 是無法分解成一次式的部份. 依定義對於 $i=1,\ldots,k$, 每個 λ_i 的 algebraic multiplicity 為 a_i 而且因 $p_A(t)$ 的次數為 n, 我們有 $a_1+\cdots+a_k+\deg(h(t))=n$. 由於這個分解已讓我們掌握了 A 所有的 eigenvalue，所以 A 的 eigenvectors 只能在 $E_A(\lambda_1),\ldots,E_A(\lambda_k)$ 這些 eigenspace 中挑選出來。若對 $i=1,\ldots,k$，設 $g_i=\dim(E_A(\lambda_i))$，亦即 g_i 為 λ_i 的幾何重根數，這表示對每個 eigenvalue λ_i 可找到 $\mathbf{v}_{i,1},\ldots,\mathbf{v}_{i,g_i}$ 為 $E_A(\lambda_i)$ 的一組 basis. 將這 k 組 eigenvectors 收集在一起後, 我們要說明這

$g_1+\cdots+g_k$ 個向量 $\mathbf{v}_{1,1},\ldots,\mathbf{v}_{1,m_1},\ldots,\mathbf{v}_{k,1},\ldots,\mathbf{v}_{k,g_k}$ 是 linearly independent. 下一個定理，幫助我們了解它們確實會線性獨立。

Proposition 8.1.3. 假設 A 為 $n\times n$ *matrix* 且 $\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_k$ 為 A 的 *eigenvectors.* 若 $\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_k$ 所對應的 *eigenvalues* 皆相異, 則 $\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_k$ 為 *linearly independent.*

Proof. 我們利用數學歸納法證明. 先探討兩個 eigenvectors 的情況. 當 $\mathbf{v}_1$ 為 A 的 eigenvector, 若其 eigenvalue 為 λ, 則和 $\mathbf{v}_1$ 平行的 nonzero vector 皆為 eigenvalue 為 λ 的 eigenvector (參見 Proposition 7.2.3 (1)). 也因此若 $\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2$ 為 A 的 eigenvectors 而它們所對應的 eigenvalue 是相異時, 則 $\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2$ 不可能平行. 也就是說 $\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2$ 為 linearly independent. 接著我們假設有 $k-1$ 個 eigenvectors 的情形也成立. 現考慮 k 個 eigenvectors 的情形. 假設 $\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_k$ 為 A 的 eigenvectors 且其對應的 eigenvalue 分別為 $\lambda_1,\ldots,\lambda_k$ (亦即 $A\mathbf{v}_i=\lambda_i\mathbf{v}_i$, for $i=1,\ldots,n$). 依歸納法之假設 $\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_{k-1}$ 為 linearly independent. 現用反證法, 假設 $\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_{k-1},\mathbf{v}_k$ 為 linearly dependent. 依 Lemma 3.5.4, 這表示 $\mathbf{v}_k\in\mathrm{Span}(\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_{k-1})$. 也就是說存在 $c_1,\ldots,c_{k-1}\in\mathbb{F}$ 使得

$$\mathbf{v}_k=c_1\mathbf{v}_1+\cdots+c_{k-1}\mathbf{v}_{k-1} \tag{8.1}$$

注意：由於 $\mathbf{v}_k\neq\mathbf{0}$, 我們知 $c_1,\ldots,c_{k-1}$ 不全為 0. 利用 eigenvector 的定義我們得

$$\lambda_k\mathbf{v}_k=A\mathbf{v}_k=A(c_1\mathbf{v}_1+\cdots+c_{k-1}\mathbf{v}_{k-1})=c_1A\mathbf{v}_1+\cdots+c_{k-1}A\mathbf{v}_{k-1}=c_1\lambda_1\mathbf{v}_1+\cdots+c_{k-1}\lambda_{k-1}\mathbf{v}_{k-1}. \tag{8.2}$$

將式子 (8.1) 乘上 λ_k 與式子 (8.2) 相減得

$$c_1(\lambda_k-\lambda_1)\mathbf{v}_1+\cdots+c_{k-1}(\lambda_k-\lambda_{k-1})\mathbf{v}_{k-1}=\mathbf{0}. \tag{8.3}$$

前面已知 $c_1,\ldots,c_{k-1}$ 不全為 0, 而由 eigenvalue 皆相異, 我們知對任意 $i=1,\ldots,k-1$, 皆有 $\lambda_k-\lambda_i\neq 0$. 因此 $c_1(\lambda_k-\lambda_1),\ldots,c_{k-1}(\lambda_k-\lambda_{k-1})$ 為不全為 0 的實數. 換句話說, 式子 (8.3) 告訴我們 $\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_{k-1}$ 為 linearly dependent, 此與歸納之假設相矛盾, 得證本定理. □

如何說明 $\mathbf{v}_{1,1},\ldots,\mathbf{v}_{1,g_1},\ldots,\mathbf{v}_{k,1},\ldots,\mathbf{v}_{k,g_k}$ 是 linearly independent 呢？照慣例, 我們先假設 $\mathbf{v}_{1,1},\ldots,\mathbf{v}_{1,g_1},\ldots,\mathbf{v}_{k,1},\ldots,\mathbf{v}_{k,g_k}$ 是 linearly dependent. 亦即存在不全為 0 的 $c_{1,1},\ldots,c_{1,g_1},\ldots,c_{k,1},\ldots,c_{k,g_k}\in\mathbb{F}$ 使得

$$c_{1,1}\mathbf{v}_{1,1}+\cdots+c_{1,g_1}\mathbf{v}_{1,g_1}+\cdots+c_{k,1}\mathbf{v}_{k,1}+\cdots+c_{k,g_k}\mathbf{v}_{k,g_k}=\mathbf{0}.$$

此時對任意 $i\in\{1,\ldots,k\}$, 我們令 $\mathbf{w}_i=c_{i,1}\mathbf{v}_{i,1}+\cdots+c_{i,m_i}\mathbf{v}_{i,m_i}$. 因此由於 $\mathbf{v}_{i,1},\ldots,\mathbf{v}_{i,m_i}$ 為 linearly independent, 如果 $c_{i,1},\ldots,c_{i,m_i}$ 不全為 0, 可得 $\mathbf{w}_i\neq\mathbf{0}$. 但由於 $\mathbf{w}_i\in E_A(\lambda_i)$, 故此時 $\mathbf{w}_i$ 為 eigenvalue 為 λ_i 的 eigenvector. 也就是說, 若存在某些 $c_{i,j}\neq 0$, 則對於那些 i, $\mathbf{w}_i$ 會是 eigenvalue 為 λ_i 的 eigenvectors 滿足 $\mathbf{w}_1+\cdots+\mathbf{w}_k=\mathbf{0}$. 此與 Proposition 8.1.3 所述, 不同 eigenvalue 的 eigenvectors 之間是 linearly independent 的結果相矛盾, 故得證 $\mathbf{v}_{1,1},\ldots,\mathbf{v}_{1,m_1},\ldots,\mathbf{v}_{k,1},\ldots,\mathbf{v}_{k,m_k}$ 是 linearly independent.

事實上由前面的論述我們知道在每個 eigenvalue 不同的 eigenspace 中任取一些線性獨立的向量，這些向量全部擺在一起依然會是線性獨立的。因此在 $\mathbb{F}^n$ 中一定可以找到且最多也只能有 $g_1+\cdots+g_k$ 個 A 的 eigenvectors 是 linearly independent。也因此若要找到

一組 $\mathbb{F}^n$ 的基底是由 A 的 eigenvectors 所形成的，等同於 $g_1+\cdots+g_k=n$。再由前面已知 $a_1+\cdots+a_k+\deg(h(t))=n$，兩式合併可得

$$(a_1-g_1)+\cdots+(a_k-g_k)+\deg(h(t))=0 \tag{8.4}$$

因為每個 eigenvalue 的代數重根數大於或等於幾何重根數（Proposition 7.4.6），亦即對每一個 i，皆有 $a_i-g_i\geq 0$。再加上 $\deg(h(t))\geq 0$，所以式子 (8.4) 成立的充要條件就是 $\deg(h(t))=0$ 以及對每一個 i，皆有 $a_i-g_i=0$。這裡 $\deg(h(t))=0$ 表示 A 的 characteristic polynomial $p_A(t)$ 沒有不可分解成一次式的部份，也就是在 $\mathbb{F}$ 中可以完全分解，因此我們證得了以下一個方陣可以對角化的等價條件：

Theorem 8.1.4. 假設 $A\in \mathsf{M}_{n\times n}(\mathbb{F})$. 以下敘述是等價的.

(1) $\mathbb{F}^n$ 中存在一組 *basis* 是由 A 的 *eigenvectors* 所組成.

(2) 存在一個 *invertible matrix* $P\in \mathsf{M}_{n\times n}(\mathbb{F})$ 使得 $P^{-1}AP$ 為 *diagonal matrix.*

(3) A 的 *characteristic polynomial* 可在 $\mathbb{F}$ 中完全分解且 A 的每個 *eigenvalue* 的 *geometric multiplicity* 等於其 *algebraic multiplicity.*

Example 8.1.5. 我們考慮矩陣 $A=\begin{bmatrix}0&3&1\\-1&3&1\\0&1&1\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}-1&4&2\\-1&3&1\\-1&2&2\end{bmatrix}$. 經計算可得它們有相同的 characteristic polynomial $-(t-1)^2(t-2)$. 也因此 A,B 的 eigenvalue 1 其 algebraic multiplicity 皆為 2, 而 eigenvalue 2 的 algebraic multiplicity 皆為 1. 由於 eigenvalue 2 的 algebraic multiplicity 為 1, 我們知其 geometric multiplicity 亦為 1, 所以我們僅要檢查 eigenvalue 1 的 geometric multiplicity 即可.

矩陣 A 對於 eigenvalue 1 的 eigenspace, 即 $A-I_3=\begin{bmatrix}-1&3&1\\-1&2&1\\0&1&0\end{bmatrix}$ 的 null space. 經由 elementary row operations, 可化為 echelon form $\begin{bmatrix}1&0&-1\\0&1&0\\0&0&0\end{bmatrix}$. 可得 $E_A(1)=\mathrm{Span}(\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix})$. 也就是說 A 對於 eigenvalue 為 1 的 eigenvector 就是那些和 $\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}$ 平行的 nonzero vector, 我們也得到 A 對於 eigenvalue 1 的 geometric multiplicity 為 1. 因其 geometric multiplicity 不等於 algebraic multiplicity, 可得 A 不是 diagonalizable matrix. 回顧在 Example 7.4.2 中我們計算過 B 在 eigenvalue 1 和 eigenvalue 2 的 geometric multiplicity 皆等於其 algebraic multiplicity, 所以 B 為 diagonalizable matrix. 我們看如何將 B 對角化.

由於 B 對於 eigenvalue 為 1 和 2 的 eigenspace 分別為 $E_B(1)=\mathrm{Span}(\begin{bmatrix}2\\1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix})$ 和 $E_B(2)=\mathrm{Span}(\begin{bmatrix}2\\1\\1\end{bmatrix})$, 可得 $\begin{bmatrix}2\\1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}2\\1\\1\end{bmatrix}$ 就是一組由 B 的 eigenvectors 所形成的 $\mathbb{R}^3$ 的

basis. 因此若令 $P=\begin{bmatrix}2&1&2\\1&0&1\\0&1&1\end{bmatrix}$ 以及 $D=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{bmatrix}$, 則

$$BP=\begin{bmatrix}-1&4&2\\-1&3&1\\-1&2&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&1&2\\1&0&1\\0&1&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&1&4\\1&0&2\\0&1&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&1&2\\1&0&1\\0&1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{bmatrix}=PD.$$

再由 P 為 invertible, 得 $P^{-1}BC=D$.

依照 diagonalizable matrix 的定義, 我們可以將 Theorem 8.1.4 中任一項當成檢驗矩陣是否為 diagonalizable 的方法.

Question 8.1. *假設 A 為 $n\times n$ matrix. 試利用 Theorem 8.1.4 (2) 說明 A 為 diagonalizable 若且唯若 A^{t} 為 diagonalizable.*

由 Proposition 7.3.6 我們知道 A 和 A^{t} 有相同的 characteristic polynomial 所以他們有相同的 eigenvalue 而且這些 eigenvalue 在 A 和 A^{t} 的 algebraic multiplicity 會相同. 而 Question 8.1 似乎暗示這對 geometric multiplicity 也成立, 事實上我們有以下的結果.

Proposition 8.1.6. *假設 A 為 $n\times n$ matrix 且 $\lambda\in\mathbb{R}$ 為 A 的一個 eigenvalue. 則 λ 對於 A 的 geometric multiplicity 與 λ 對於 A^{t} 的 geometric multiplicity 相等.*

Proof. 我們要說明 $\dim(E_A(\lambda))=\dim(E_{A^{\mathrm{t}}}(\lambda))$, 亦即 $\dim(N(A-\lambda I_n))=\dim(N(A^{\mathrm{t}}-\lambda I_n))$. 由 Theorem 3.7.14 我們知 $\dim(N(A-\lambda I_n))=\mathrm{nullity}(A-\lambda I_n)=n-\mathrm{rank}(A-\lambda I_n)$, 同理由 $A\in\mathscr{M}_{n\times n}$ 得 $\dim(N(A^{\mathrm{t}}-\lambda I_n))=n-\mathrm{rank}(A^{\mathrm{t}}-\lambda I_n)$. 因為 $A^{\mathrm{t}}-\lambda I_n=(A-\lambda I_n)^{\mathrm{t}}$ 以及 $\mathrm{rank}((A-\lambda I_n)^{\mathrm{t}})=\mathrm{rank}(A-\lambda I_n)$ (Proposition 3.7.15), 得證 $\dim(N(A-\lambda I_n))=\dim(N(A^{\mathrm{t}}-\lambda I_n))$. □

Question 8.2. *假設 A 為 $n\times n$ matrix. 試利用 Theorem 8.1.4 (3) 說明 A 為 diagonalizable 若且唯若 A^{t} 為 diagonalizable.*

我們已知, 對於 linear operator 的 eigenvalue, eigenvector 和其表現矩陣的 eigenvalue, eigenvector 之間的關係, 換言之一個 linear operator 是否為 diagonalizable 取決於其表現矩陣是否為 diagonalizable. 所以 Theorem 8.1.4 對於 linear operator 也是對的, 因此我們有以下結果.

Theorem 8.1.7. *假設 V 為 vector space over $\mathbb{F}$ 且 $T:V\to V$ 為 linear operator. 以下敘述是等價的.*

(1) *V 中存在一組 basis 是由 T 的 eigenvectors 所組成.*

(2) *存在一個 V 的 ordered basis β 使得 $[T]_\beta$ 為 diagonal matrix.*

(3) *T 的 characteristic polynomial 可在 $\mathbb{F}$ 中完全分解且 T 的每個 eigenvalue 的 geometric multiplicity 等於其 algebraic multiplicity.*

最後我們再次強調在檢查一個矩陣是否為 diagonalizable 時, 對於 algebraic multiplicity 為 1 的 eigenvalue 我們就不必檢查其 geometric multiplicity 了. 舉例來說, 若 A 的 characteristic polynomial 可在 $\mathbb{F}$ 中完全分解且其根皆為單根 (無重根), 則 A 一定為 diagonalizable. 另外還有一種矩陣不必檢查就知道一定是 diagonalizable, 就是 symmetric matrix. 下一節我們將會證明所有的 symmetric matrix 皆為 diagonalizable.

假設 $A \in \mathsf{M}_{n\times n}(\mathbb{F})$ 為 diagonalizable, 我們知存在 invertible matrix P 使得 $P^{-1}AP$ 為 diagonal matrix D. 換言之, 我們可以將 A 寫成 $A = PDP^{-1}$. 也因此我們可得

$$A^2 = (PDP^{-1})(PDP^{-1}) = PD^2P^{-1}.$$

同理對任意 $m \in \mathbb{N}$, 我們有 $A^m = PD^mP^{-1}$. 寫成這樣有什麼好處呢? 因為 D 為對角矩陣 $\begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix}$, 我們很可以容易算出 D^m, 即 $\begin{bmatrix} \lambda_1^m & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n^m \end{bmatrix}$. 因此只要知道 P 和 P^-1, 我們就可以很輕易算出 A^m (即 PD^mP^{-1}), 而不必真正將 A 乘到 m 次方了.

Example 8.1.8. 考慮實矩陣 $B = \begin{bmatrix} -1 & 4 & 2 \\ -1 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$. 在 Example 8.1.5 我們算出 $P^{-1}BP = D$, 其中 $P = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ 以及 $D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$. 由於 $P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$, 我們得

$$B^5 = PD^5P^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 32 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -61 & 124 & 62 \\ -31 & 63 & 31 \\ -31 & 62 & 32 \end{bmatrix}.$$

Exercise 8.1. 以下矩陣試說明那些矩陣可以在實數對角化, 那些不可以. 若矩陣 A 可對角化, 請找到可逆矩陣 P 以及對角矩陣 D 使得 $P^{-1}AP = D$.

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} -3 & 1 & -1 \\ -7 & 5 & -1 \\ -6 & 6 & -2 \end{bmatrix}.$$

Exercise 8.2. 假設 A, B 皆為 n 階方陣.

(1) 證明若 A, B 皆為 diagonalizable 且 A, B 有相同的 characteristic polynomial, 則 A 和 B 為 similar.

(2) 考慮 $n = 3$ 的情況，試找到矩陣 A, B, C 其 characteristic polynomial 皆為 $-x^3$ 但 A、B、C 兩兩不 similar.

Exercise 8.3. 已知 A 為 $n \times n$ diagonalizable matrix.

(1) 說明可用 diagonalizable 的等價關係中的哪一個來證明 A^{t} 為 diagonalizable（參見講義 Question 8.1, 8.2）。

(2) 考慮 $n = 2$ 的情形，假設向量 $(a,b),(c,d)$ 為 A 的兩個 linearly independent 的 eigenvectors 且其對應的 eigenvalues 分別為 λ_1, λ_2，試找出 A^{t} 的兩個 linearly independent 的 eigenvectors 及其對應的 eigenvalues。

(3) 假設 A 為 invertible，說明可用 diagonalizable 的等價關係中的哪一個來證明 A^{-1} 為 diagonalizable。

(4) 假設 A 為 invertible，考慮 $n = 2$ 的情形。假設向量 $(a,b),(c,d)$ 為 A 的兩個 linearly independent 的 eigenvectors 且其對應的 eigenvalues 分別為 λ_1, λ_2，試找出 A^{-1} 的兩個 linearly independent 的 eigenvectors 及其對應的 eigenvalues。

Exercise 8.4. 考慮 $n \in \mathbb{N}$ 且 $n > 1$，以及 $\mathbb{R}^n$ 中的 nonzero vector $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$ 且令 $c = a_1 + \cdots + a_n$. 考慮 $n \times n$ matrix A，其中 A 的每個 column 皆為 $\mathbf{v}$. 我們要探討 A 是否可對角化。

(1) 利用 dimension 定理求 A 的 nullity. 說明 0 為何會是 A 的 eigenvalue 以及 0 的 geometric multiplicity.

(2) 請問 eigenvalue 0 其 algebraic multiplicity 與 geometric multiplicity 之間的關係，並以此說明 x^{n-1} 必整除 A 的 characteristic polynomial.

(3) 利用 trace 與 characteristic polynomial 的關係說明 A 的 characteristic polynomial 為 $(-1)^n(x^n - cx^{n-1})$.

(4) 說明 A 可以對角化若且唯若 $c \neq 0$.

(5) 利用對任意 $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$ 皆有 $A\mathbf{w} \in \mathrm{Col}(A)$，說明 $\mathbf{v}$ 一定是 A 的一個 eigenvector，並求其 eigenvalue.

(6) 若 $c \neq 0$ 試寫下可逆矩陣 P 以及對角矩陣 D 使得 $P^{-1}AP = D$。（注意：你需具體找到 $N(A)$ 的一組 basis.）