

## 8.2. The Spectral Theorem

在這一節中我們要探討實對稱矩陣皆為 diagonalizable, 更重要的是它們都是所謂的 *orthogonal diagonalizable*. 這個結果在數學和物理方面都有很重要的應用, 不過我們不會深入探討它的應用, 而著重於說明如何將 symmetric matrix 對角化. 本節所討論的矩陣皆為實矩陣, 就不再個別申明。

首先我們來看  $2 \times 2$  symmetric matrix 的情形. 假設  $A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}$ , 其中  $b \neq 0$  (因為若  $b = 0$ , 此時  $A$  已為 diagonal matrix 不必對角化). 此時  $A$  的 characteristic polynomial 為  $P_A(t) = t^2 - (a+c)t + (ac - b^2)$ . 由於  $P_A(t)$  的判別式  $(a+c)^2 - 4(ac - b^2) = (a-c)^2 + 4b^2 > 0$ , 我們得  $P_A(t) = 0$  有兩相異實根  $\lambda_1, \lambda_2$ . 也就是說  $\lambda_1, \lambda_2$  為  $A$  的兩相異 eigenvalue, 故知  $A$  為 diagonalizable. 事實上若令  $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} b \\ \lambda_1 - a \end{bmatrix}$ , 我們有

$$A\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b \\ \lambda_1 - a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 b \\ b^2 + \lambda_1 c - ac \end{bmatrix} = \lambda_1 \begin{bmatrix} b \\ \lambda_1 - a \end{bmatrix} = \lambda_1 \mathbf{v}_1.$$

注意這裡我們用到了  $\lambda_1^2 - (a+c)\lambda_1 + (ac - b^2) = 0$ . 由於  $b \neq 0$ , 我們知  $\mathbf{v}_1 \neq \mathbf{0}$ , 故  $\mathbf{v}_1$  是  $A$  的 eigenvector 其 eigenvalue 為  $\lambda_1$ . 同理令  $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} b \\ \lambda_2 - a \end{bmatrix}$ , 我們可得  $\mathbf{v}_2$  為  $A$  的 eigenvector 其 eigenvalue 為  $\lambda_2$ . 重要的是, 我們有  $\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rangle = b^2 + \lambda_1 \lambda_2 - a(\lambda_1 + \lambda_2) + a^2$ . 利用根與係數關係, 即  $\lambda_1 \lambda_2 = ac - b^2$  以及  $\lambda_1 + \lambda_2 = a + c$ , 我們得  $\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rangle = 0$ . 也就是說  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$  這組  $\mathbb{R}^2$  的 basis 不只是由  $A$  的 eigenvectors 所組成, 而且它們兩兩互相垂直. 這種比一般 diagonalizable 更強的條件我們便稱之為 orthogonal diagonalizable. 其正式的定義如下.

**Definition 8.2.1.** 假設  $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ , 若存在一組  $\mathbb{R}^n$  的 orthogonal basis  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$  其中每個  $\mathbf{v}_i$  皆為  $A$  的 eigenvectors, 則稱  $A$  為 *orthogonal diagonalizable*.

當然了, 在 Definition 8.2.1 中若令  $\mathbf{u}_i = \frac{1}{\|\mathbf{v}_i\|} \mathbf{v}_i$  則  $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n$  為  $\mathbb{R}^n$  的一組 orthonormal basis 且皆為  $A$  的 eigenvectors. 所以  $A$  為 orthogonal diagonalizable 也等同於  $\mathbb{R}^n$  中有一組 orthonormal basis 是由  $A$  的 eigenvector 所組成. 此時若  $\mathbf{u}_i$  所對應的 eigenvalue 為  $\lambda_i$  且令  $Q = \begin{bmatrix} | & | & \cdots & | \\ \mathbf{u}_1 & \mathbf{u}_2 & \cdots & \mathbf{u}_n \\ | & | & \cdots & | \end{bmatrix}$  則可得  $AQ = QD$  其中  $D$  為  $(i, i)$ -th entry 為  $\lambda_i$  的 diagonal matrix, 也就是說我們可以將  $A$  對角化成  $Q^{-1}AQ = D$ . 一般由 eigenvectors 所形成的 basis 都可以達到這個對角化的目的, 為何特別考慮  $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n$  為 orthonormal basis 的情形呢? 這是因為當  $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n$  為  $\mathbb{R}^n$  的 orthonormal basis 時, 我們會有  $Q^t Q = I_n$ , 也因此由 inverse matrix 的唯一性, 我們知  $Q^t = Q^{-1}$ . 也就是說當  $Q$  的 column vectors 為  $\mathbb{R}^n$  的 orthonormal basis 時, 我們可以馬上得知  $Q^{-1} = Q^t$ . 就因為這個特性, 當一個  $n \times n$  matrix 其 column vectors 是由  $\mathbb{R}^n$  的 orthonormal basis 所組成時, 我們特別稱之為 *orthogonal matrix* (注意不是稱為 orthonormal matrix). 也因此我們可以將  $A$  對角化成  $Q^t A Q = D$ , 故稱  $A$  為 orthogonal diagonalizable.

**Question 8.3.** 假設  $Q \in M_{n \times n}$ , 是否  $Q^{-1} = Q^t$  即表示  $Q$  為 *orthogonal matrix*?

反之, 若存在  $Q$  為  $n \times n$  orthogonal matrix 以及  $D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix}$  為  $n \times n$  diagonal matrix 使得  $Q^t A Q = D$ . 此時由  $AQ = QD$ , 知  $Q$  的  $i$ -th column 為  $A$  的 eigenvalue 為  $\lambda_i$  的 eigenvector, 也因此由  $Q$  的 column vectors 形成  $\mathbb{R}^n$  的 orthonormal basis, 我們有以下之結果.

**Proposition 8.2.2.** 假設  $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ . 則  $A$  為 *orthogonal diagonalizable* 若且唯若存在  $n \times n$  的 *orthogonal matrix*  $Q$  使得  $Q^t A Q$  為 *diagonal matrix*.

利用 Proposition 8.2.2, 我們知當  $A$  為 *orthogonal diagonalizable* 時存在  $Q, D \in M_{n \times n}$  其中  $Q$  為 *orthogonal matrix*,  $D$  為 *diagonal matrix* 使得  $A = QDQ^t$ . 此時  $A^t = (QDQ^t)^t = (Q^t)^t D^t Q^t$ . 由於  $(Q^t)^t = Q$  且  $D^t = D$  (因為  $D$  為 *diagonal matrix*), 我們得  $A^t = QDQ^t = A$ , 亦即  $A$  為 *symmetric*. 得證了以下結果.

**Corollary 8.2.3.** 假設  $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$  為 *orthogonal diagonalizable*, 則  $A$  為 *symmetric matrix*.

所謂 Spectral Theorem 指的就是 Corollary 8.2.3 的反向也是對的. 也就是說我們要證明當  $A$  為 *symmetric* 時,  $A$  必為 *orthogonal diagonalizable*. 這裡我們可以用數學歸納法, 也就是因為已證得  $2 \times 2$  *symmetric matrix* 皆為 *orthogonal diagonalizable*. 我們希望依此證明任意  $3 \times 3$  *symmetric matrix*  $A$  也都是 *orthogonal diagonalizable*. 因為  $A$  的 characteristic polynomial  $p_A(t)$  為三次實係數多項式, 必有一實根  $\lambda$ , 故此  $\lambda$  為  $A$  的一個 eigenvalue. 令  $\mathbf{u}_1$  為  $A$  對於  $\lambda$  的 eigenvector 且  $\|\mathbf{u}_1\| = 1$ . 利用 Gram-Schmidt process, 我們可以將  $\mathbf{u}_1$  拓

展成  $\mathbb{R}^3$  的一組 orthonormal basis  $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$ . 現考慮 *orthogonal matrix*  $U = \begin{bmatrix} | & | & | \\ \mathbf{u}_1 & \mathbf{u}_2 & \mathbf{u}_3 \\ | & | & | \end{bmatrix}$ ,

若  $A\mathbf{u}_2 = k\mathbf{u}_1 + a\mathbf{u}_2 + c\mathbf{u}_3$  且  $A\mathbf{u}_3 = k'\mathbf{u}_1 + b\mathbf{u}_2 + d\mathbf{u}_3$  則依舉陣乘法定義我們有  $AU = UC$ ,

其中  $C = \begin{bmatrix} \lambda & k & k' \\ 0 & a & b \\ 0 & c & d \end{bmatrix}$ . 因  $U$  為 *orthogonal matrix*, 我們得  $C = U^{-1}AU = U^tAU$ . 因此再由  $A$  為 *symmetric* 得  $C^t = U^tAU = C$ , 亦即  $C$  亦為 *symmetric*. 然而  $C$  的 1-st column 為

$\begin{bmatrix} \lambda \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ , 故由  $C$  為 *symmetric* 知  $C$  的 1-st row 為  $[\lambda \ 0 \ 0]$ . 同理, 我們有  $b = c$ , 也就是說

$C = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & a & b \\ 0 & b & d \end{bmatrix}$ . 此時因  $B = \begin{bmatrix} a & b \\ b & d \end{bmatrix}$  為 *orthogonal diagonalizable*, 亦即存在  $\begin{bmatrix} r \\ s \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} s \\ -r \end{bmatrix}$  為

$\mathbb{R}^2$  的一組 orthonormal basis (即  $r^2 + s^2 = 1$ ) 且為  $B$  的 eigenvectors, 亦即

$$\begin{bmatrix} a & b \\ b & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r \\ s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ra + sb \\ rb + sd \end{bmatrix} = \lambda_1 \begin{bmatrix} r \\ s \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} a & b \\ b & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s \\ -r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} sa - rb \\ sb - rd \end{bmatrix} = \lambda_2 \begin{bmatrix} s \\ -r \end{bmatrix}$$

此時令  $P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r & s \\ 0 & s & -r \end{bmatrix}$ ，知  $P$  為 orthogonal matrix 且依矩陣乘法，我們有

$$CP = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & a & b \\ 0 & b & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r & s \\ 0 & s & -r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & ra+sb & sa-rb \\ 0 & rb+sc & sb-rc \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 r & \lambda_2 s \\ 0 & \lambda_1 s & -\lambda_2 r \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}.$$

也就是說  $P^t CP$  為 diagonal matrix，也因此得  $(UP)^t A (UP) = P^t (U^t A U) P = P^t CP$  為 diagonal matrix。注意由於  $U, P$  皆為 orthogonal matrix，故  $(UP)^t (UP) = P^t (U^t U) P = P^t P = I_3$ ，也就是說  $UP$  亦為 orthogonal matrix。因此由 Proposition 8.2.2，得  $A$  為 orthogonal diagonalizable。

接著我們考慮  $A$  為 4 階對稱矩陣，以確保可以用數學歸納法。不過此時  $p_A(t)$  為四次多項式，未必會有實根。也就是說：我們無法如  $n=3$  的情形，先找到一個 eigenvector，再將矩陣化簡成降一階的對稱矩陣。所以要讓數學歸納法可行，我們必須先確認，所有  $n$  階的對稱矩陣，其 characteristic polynomial 必有一實根（當然這在  $n$  為偶數時特別重要）。要證實此事，首先我們需要知道 symmetric matrix 和內積之間的關係。

**Lemma 8.2.4.** 假設  $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$  為 symmetric，則

$$\langle A\mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{v}, A\mathbf{w} \rangle, \quad \forall \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^n.$$

**Proof.** 回顧一下，若將內積寫成矩陣乘法的形式，對於任意  $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$  我們有  $\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = \mathbf{v}^t \mathbf{w}$ （注意此處  $\mathbf{v}, \mathbf{w}$  皆視為  $n \times 1$  matrix）。因此得

$$\langle A\mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = (A\mathbf{v})^t \mathbf{w} = (\mathbf{v}^t A^t) \mathbf{w} = \mathbf{v}^t (A^t \mathbf{w}) = \langle \mathbf{v}, A^t \mathbf{w} \rangle.$$

最後由  $A^t = A$  之假設得證  $\langle A\mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{v}, A\mathbf{w} \rangle$ . □

接下來我們便是要說明一個 symmetric matrix 其 characteristic polynomial 確實可以在實數中找到一根。

**Lemma 8.2.5.** 假設  $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$  為 symmetric，則  $A$  的 characteristic polynomial  $p_A(t)$  會有實根。

**Proof.** 我們用反證法，假設  $p_A(t)$  無實根，亦即  $p_A(t) = q_1(t) \cdots q_k(t)$  其中每個  $q_i(t)$  皆為不可在實數分解的二次多項式（即判別式小於 0）。然而 Cayley-Hamilton Theorem 告訴我們  $p_A(A) = q_1(A) \cdots q_k(A)$  為零矩陣，所有必有一  $q_i(t) = t^2 + bt + c$  使得  $\det(q_i(A)) = \det(A^2 + bA + cI_n) = 0$ 。也就是說  $A^2 + bA + cI_n$  為 singular，亦即存在  $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$  且  $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$  使得

$$(A^2 + bA + cI_n)\mathbf{v} = A^2\mathbf{v} + bA\mathbf{v} + c\mathbf{v} = \mathbf{0}.$$

然而

$$\langle A^2\mathbf{v} + bA\mathbf{v} + c\mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle = \langle A^2\mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle + b\langle A\mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle + c\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle. \quad (8.5)$$

現  $A$  為 symmetric，由 Lemma 8.2.4 知  $\langle A^2\mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle = \langle A(A\mathbf{v}), \mathbf{v} \rangle = \langle A\mathbf{v}, A\mathbf{v} \rangle$ ，故若考慮

$$\langle A\mathbf{v} + \frac{1}{2}b\mathbf{v}, A\mathbf{v} + \frac{1}{2}b\mathbf{v} \rangle = \langle A\mathbf{v}, A\mathbf{v} \rangle + b\langle A\mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle + \frac{1}{4}b^2\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle = \langle A^2\mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle + b\langle A\mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle + \frac{1}{4}b^2\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle$$

則式子 (8.5) 可改寫為

$$\langle A^2\mathbf{v} + bA\mathbf{v} + c\mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle = \|A\mathbf{v} + \frac{1}{2}b\mathbf{v}\|^2 + \frac{1}{4}(4c - b^2)\|\mathbf{v}\|^2$$

然而  $\|\mathbf{v}\| > 0$  且  $4c - b^2 > 0$  (因判別式  $b^2 - 4c < 0$ ) 我們得  $\langle A^2\mathbf{v} + bA\mathbf{v} + c\mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle > 0$ . 此與  $A^2\mathbf{v} + bA\mathbf{v} + c\mathbf{v} = \mathbf{0}$  相矛盾, 故知  $p_A(t)$  不可能無實根.  $\square$

**Question 8.4.** 假設  $A$  為實對稱矩陣且  $q(t)$  是實係數二次不可分解多項式, 說明  $q(A)$  必為可逆矩陣。

知道 symmetric matrix 的 characteristic polynomial 皆有實根, 對於任意  $n$  階實對稱矩陣  $A$ , 我們便可如前述方法, 先找到一個單位長的 eigenvector  $u_1$ , 再用 Gram-Schmidt 找到  $\mathbb{R}^n$  的一組 orthonormal basis  $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n$ . 將  $A$  轉換成利用這組基底所得的表現矩陣, 利用其為對稱矩陣以及  $n-1$  階實對稱矩陣為 orthogonal diagonalizable 的歸納假設證得  $A$  為 orthogonal diagonalizable. 因此證明了以下的 Spectral Theorem.

**Theorem 8.2.6** (Spectral Theorem). 假設  $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$  為 symmetric, 則  $A$  為 orthogonal diagonalizable.

接下來我們來探討, 給定一個  $n \times n$  symmetric matrix  $A$ , 如何找到 orthogonal matrix  $Q$  使得  $Q^t A Q$  為 diagonal matrix. 當然了, 我們可以如數學歸納法一步一步地將  $Q$  找到. 不過這要重複做好幾次的 Gram-Schmidt process, 頗為複雜. 利用以下的 Proposition, 我們可以將步驟簡化許多.

**Proposition 8.2.7.** 假設  $A$  為  $n \times n$  symmetric matrix. 若  $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$  為  $A$  的 eigenvectors 且其對應的 eigenvalue 為相異實數, 則  $\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = 0$ .

**Proof.** 假設  $\mathbf{v}, \mathbf{w}$  所對應的 eigenvalue 分別為  $\lambda, \lambda'$ . 也就是說  $A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}, A\mathbf{w} = \lambda'\mathbf{w}$ . 考慮  $\langle A\mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = \langle \lambda\mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = \lambda\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle$ . 同理我們有  $\langle \mathbf{v}, A\mathbf{w} \rangle = \lambda'\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle$ . 然而 Lemma 8.2.4 告訴我們  $\langle A\mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{v}, A\mathbf{w} \rangle$ , 故得  $(\lambda - \lambda')\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = 0$ . 因此由題設  $\lambda \neq \lambda'$  推得  $\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = 0$ .  $\square$

當  $A$  為  $n \times n$  symmetric matrix, 我們簡單說明一下如何找到一組  $A$  的 eigenvectors 形成  $\mathbb{R}^n$  的 orthonormal basis. 首先我們列出  $A$  的所有相異的 eigenvalues  $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ , 然後求出它們所對應的 eigenspace  $E_A(\lambda_1), \dots, E_A(\lambda_k)$ . 若我們將每個  $E_A(\lambda_i)$  的 basis 放在一起, 由於  $A$  為 diagonalizable 它們會是  $\mathbb{R}^n$  的一組 basis. 雖然 Proposition 8.2.7 告訴我們, 當  $\lambda_i \neq \lambda_j$  時,  $E_A(\lambda_i)$  和  $E_A(\lambda_j)$  之間的向量是相互垂直的. 不過  $E_A(\lambda_i)$  本身的那一組 basis 之間的向量未必兩兩相互垂直. 所以我們必須利用 Gram-Schmidt process 分別找到  $A$  每個 eigenspace  $E_A(\lambda_i)$  的一組 orthonormal basis. 再將這些 eigenspace 的 basis 放在一起它們自然兩兩互相垂直, 也因此它們就是由  $A$  的 eigenvectors 所組成的  $\mathbb{R}^n$  的一組 orthonormal basis. 我們看以下的例子.

**Example 8.2.8.** (1) 考慮 symmetric matrix  $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ . 我們有  $A$  的 characteristic polynomial 為  $p_A(t) = -(t+1)(t-1)(t-2)$ . 所以  $A$  有三個相異的 eigenvalues,  $-1, 1, 2$ . 知

道  $A$  必能對角化, 而且由 Proposition 8.2.7 知它們所對應的 eigenvector 會兩兩互相垂直. 事實上我們可求出對應到  $-1, 1, 2$  的 eigenvector 分別為

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

很容易檢查它們確實兩兩互相垂直. 此時對於  $i = 1, 2, 3$  令  $\mathbf{u}_i = \frac{1}{\|\mathbf{v}_i\|} \mathbf{v}_i$ , 我們得

$$\mathbf{u}_1 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}_3 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

為  $\mathbb{R}^3$  的一組 orthonormal basis. 故可將  $A$  對角化成

$$\begin{bmatrix} -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{2}{\sqrt{6}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

(2) 考慮 symmetric matrix  $B = \begin{bmatrix} 5 & -4 & -2 \\ -4 & 5 & -2 \\ -2 & -2 & 8 \end{bmatrix}$ . 我們有  $B$  的 characteristic polynomial 為  $p_B(t) = -t(t-9)^2$ . 所以  $B$  eigenvalues 為  $0, 9$ . 知道  $B$  必能對角化, 我們知  $\dim(E_B(0)) = 1$ ,  $\dim(E_B(9)) = 2$ . 事實上  $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$  為  $E_B(0) = N(B)$  的 basis, 而  $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ ,  $\mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$  為  $E_B(9)$  的 basis. 而且由 Proposition 8.2.7 知  $\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rangle = \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_3 \rangle = 0$ , 事實上很容易檢查它們確實成立. 不過  $\langle \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3 \rangle = 1 \neq 0$ , 我們必須利用 Gram-Schmidt process 將  $\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$  換成  $E_B(9)$  的一組 orthogonal basis. 令  $\mathbf{w}_2 = \mathbf{v}_2$  且

$$\mathbf{w}_3 = \mathbf{v}_3 - \text{Proj}_{\mathbf{w}_2} \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} - \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

此時令  $\mathbf{u}_1 = \frac{1}{\|\mathbf{v}_1\|} \mathbf{v}_1$ ,  $\mathbf{u}_2 = \frac{1}{\|\mathbf{w}_2\|} \mathbf{w}_2$ ,  $\mathbf{u}_3 = \frac{1}{\|\mathbf{w}_3\|} \mathbf{w}_3$  我們得

$$\mathbf{u}_1 = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}_3 = \frac{1}{3\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

為  $\mathbb{R}^3$  的一組 orthonormal basis. 故可將  $B$  對角化成

$$\begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{1}{3\sqrt{2}} & -\frac{1}{3\sqrt{2}} & \frac{4}{3\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & -4 & -2 \\ -4 & 5 & -2 \\ -2 & -2 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{3\sqrt{2}} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{3\sqrt{2}} \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{4}{3\sqrt{2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}.$$

**Exercise 8.5.** 考慮以下矩陣

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}; \quad C = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

- (1) 試找到將其對角化的 orthogonal matrix 並找到其對應的對角矩陣.
- (2) 利用 (1) 試分別求  $A^2 - 9A + 18I_3$ ,  $B^{-3}$  以及  $C^5$ .

**Exercise 8.6.** 給定  $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ .

- (1) 說明  $A^t A$  is orthogonal diagonalizable 且其 eigenvalues 皆大於等於 0. (Hint: 利用矩陣乘法與內積的關係)
- (2) 假設  $A$  為 symmetric, 證明若對任意  $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$  皆有  $\langle A\mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle = 0$ , 則  $A$  為零矩陣.
- (3) 試找到一個 2 階方陣  $A$  滿足  $\langle A\mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle = 0, \forall \mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$  但  $A$  不是零矩陣.

**Exercise 8.7.** 假設  $W$  為  $\mathbb{R}^n$  的 subspace 且  $0 < \dim W < n$ . 令  $A \in M_n(\mathbb{R})$  為  $\mathbb{R}^n$  中的向量對  $W$  的投影矩陣 (orthogonal projection matrix).

- (1) 證明  $A$  的 eigenvalue 為 0, 1 且滿足  $A^2 = A$ .
- (2) 證明  $A$  為 symmetric matrix.

**Exercise 8.8.** 假設  $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$  為 symmetric matrix 且滿足  $A^2 = A$ .

- (1) 證明 0, 1 是  $A$  唯一可能的 eigenvalue.
- (2) 證明若  $A$  的 eigenvalue 1 的 algebraic multiplicity 為  $k$ , 則存在  $W$  為  $\mathbb{R}^n$  的 subspace 且  $\dim W = k$  使得  $A$  為  $\mathbb{R}^n$  中的向量對  $W$  的投影矩陣.

**Exercise 8.9.** 試利用 Spectral Theorem (即對稱矩陣皆可正交對角化) 回答以下問題。

- (1) 給定  $k \in \mathbb{R}$  試找到所有的實對稱矩陣  $A \in M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$  滿足  $\det A = k$  且  $A \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$ .
- (2) 假設  $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  以標準基底寫下的表現矩陣為實對稱矩陣. 已知 2, 5 為  $T$  的 eigenvalues 且  $(1, 1, -1), (1, -1, 0)$  為  $T$  的兩個 eigenvalue 為 5 的 eigenvector. 試求  $T(1, 1, 2)$ .
- (3) 找到實對稱矩陣  $A \in M_{3 \times 3}(\mathbb{R})$  滿足僅有 1, 2 兩個 eigenvalues, 且 2 的 eigenspace 為  $\text{Span}((1, 1, 1))$ .

### 8.3. Application: Conics and Quadric Surfaces

我們將利用 symmetric matrix 是 orthogonal diagonalizable 的特性將坐標平面上的二次曲線以及坐標空間上的二次曲面的方程式化成標準式, 以方便我們判別它們是哪一類的圖形.

一般來說我們是利用平移和旋轉的方法將二次曲線和二次曲面的方程式化成標準式. 其中旋轉的部分牽涉到對角化, 我們首先利用 quadratic form 來談對角化的問題. 所謂  $n$  個變

數的 quadratic form 指的就是形如

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}x_i x_j$$

這樣的二次式. 例如  $x^2 + 3xy - y^2$ ,  $3x^2 + y^2 - z^2 + 5xy + xz + 3yz$  就是分別是兩個變數和三

個變數的 quadratic form. 令  $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ , 所有  $n$  個變數的 quadratic form 都可以用矩陣

表示成  $\mathbf{x}^t A \mathbf{x}$  的形式, 其中  $A$  為  $n \times n$  symmetric matrix. 例如兩個變數的 quadratic form  $ax_1^2 + bx_1x_2 + cx_2^2$  就可以寫成

$$ax_1^2 + bx_1x_2 + cx_2^2 = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b/2 \\ b/2 & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}.$$

而三個變數的 quadratic form  $ax_1^2 + bx_2^2 + cx_3^2 + rx_1x_2 + sx_1x_3 + tx_2x_3$  就可以寫成

$$ax_1^2 + bx_2^2 + cx_3^2 + rx_1x_2 + sx_1x_3 + tx_2x_3 = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & r/2 & s/2 \\ r/2 & b & t/2 \\ s/2 & t/2 & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}.$$

將 quadratic form 寫成這樣的矩陣表示的好處是因為  $A$  是 symmetric, 故存在 orthogonal

matrix  $Q$  使得  $Q^t A Q$  為 diagonal matrix  $\begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix}$ . 因此如果我們將變數  $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$

變換成  $\mathbf{t} = \begin{bmatrix} t_1 \\ \vdots \\ t_n \end{bmatrix}$  其中  $\mathbf{t} = Q^t \mathbf{x}$  (注意因  $Q^t = Q^{-1}$ , 這等同於令  $\mathbf{x} = Q \mathbf{t}$ ), 則

$$\mathbf{x}^t A \mathbf{x} = (Q \mathbf{t})^t A (Q \mathbf{t}) = \mathbf{t}^t (Q^t A Q) \mathbf{t} = \begin{bmatrix} t_1 & \cdots & t_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_1 \\ \vdots \\ t_n \end{bmatrix} = \lambda_1 t_1^2 + \cdots + \lambda_n t_n^2.$$

也就是說, 我們可以藉由變換變數將一個 quadratic form 變成只有平方項. 我們看以下的例子.

**Example 8.3.1.** 考慮 quadratic form  $x_1^2 + 4x_1x_2 - 2x_2^2$ . 我們先寫下其矩陣形式

$$x_1^2 + 4x_1x_2 - 2x_2^2 = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}.$$

由於  $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$  為 symmetric matrix, 故為 orthogonal diagonalizable, 事實上我們有

$$\begin{bmatrix} 2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \\ -1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2/\sqrt{5} & -1/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}.$$

因此若令  $\begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \\ -1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$  則

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_1 & t_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \end{bmatrix} = 2t_1^2 - 3t_2^2.$$

對於 quadratic form  $x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3$ , 其矩陣形式為

$$x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}.$$

我們曾在 Example 8.2.8 計算過  $Q^t \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} Q = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$  其中  $Q$  為 orthogonal

matrix  $\begin{bmatrix} -\frac{2}{\sqrt{6}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}$ . 因此若令  $\begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$  則

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_1 & t_2 & t_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{bmatrix} = -t_1^2 + t_2^2 + 2t_3^2.$$

現在我們回到二次曲線的情況. 對於坐標平面上的二次曲線其一般的通式為  $ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$ . 我們可以將此式表為矩陣形式, 即

$$\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b/2 \\ b/2 & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d & e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + f = 0. \quad (8.6)$$

假設 symmetric matrix  $A = \begin{bmatrix} a & b/2 \\ b/2 & c \end{bmatrix}$  可對角化成  $Q^t A Q = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$ . 此時考慮變換變數  $\begin{bmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{bmatrix} = Q^t \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$  (也就是  $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = Q \begin{bmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{bmatrix}$ ), 則式子 (8.6) 可寫成

$$\begin{bmatrix} \bar{x} & \bar{y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d & e \end{bmatrix} Q \begin{bmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{bmatrix} + f = 0.$$

寫回方程式的樣子就是

$$\lambda_1 \bar{x}^2 + \lambda_2 \bar{y}^2 + d' \bar{x} + e' \bar{y} + f = 0, \quad (8.7)$$

其中  $\begin{bmatrix} d' & e' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d & e \end{bmatrix} Q$ .

首先我們考慮  $\lambda_1, \lambda_2$  皆不為 0 的情形, 此時可以利用配方法將式子 (8.7) 改寫成

$$\lambda_1 (\bar{x} - h)^2 + \lambda_2 (\bar{y} - k)^2 = f'.$$

我們分成下面幾種情形討論.

(A)  $\lambda_1, \lambda_2$  同號:

- (1)  $f'$  與  $\lambda_1, \lambda_2$  同號: 此時圖形為 *ellipse* (橢圓). 注意當  $\lambda_1 = \lambda_2$  時會是圓, 不過這裡我們將之視為橢圓的一種.
- (2)  $f' = 0$ : 此時很容易看出圖形為  $(\bar{x}, \bar{y}) = (h, k)$  這一點.
- (3)  $f'$  與  $\lambda_1, \lambda_2$  異號: 此時很容易看出圖形為空集合.

(B)  $\lambda_1, \lambda_2$  異號:

- (1)  $f' \neq 0$ : 此時圖形為 *hyperbola* (雙曲線).
- (2)  $f' = 0$ : 此時圖形為兩相交直線.

**Example 8.3.2.** 考慮二次曲線方程式  $2xy + \sqrt{2}x + \sqrt{2}y = 1$ . 此方程式可用矩陣表示成

$$\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 1.$$

由於

$$\begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

考慮變數變換  $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{bmatrix}$ , 我們得

$$\begin{bmatrix} \bar{x} & \bar{y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{bmatrix} = 1.$$

因此此曲線用新的變數其方程式為  $\bar{x}^2 - \bar{y}^2 + 2\bar{x} = 1$ . 利用配方法得  $(\bar{x}+1)^2 - \bar{y}^2 = 2$ , 故其圖形為雙曲線.

同理若原方程式為  $2xy + \sqrt{2}x + \sqrt{2}y = -1$ , 變換變數後的方程式為  $(\bar{x}+1)^2 - \bar{y}^2 = 0$  其圖形便會是兩相交直線  $\bar{x} + \bar{y} + 1 = 0$  和  $\bar{x} - \bar{y} + 1 = 0$ .  $\#$

另一種情況是  $\lambda_1, \lambda_2$  其中有一個為 0. 注意  $\lambda_1, \lambda_2$  不可能同時為 0, 否則會是一次方程式. 不失一般性, 我們假設  $\lambda_1 \neq 0, \lambda_2 = 0$  的情形. 此時可以利用配方法將式子 (8.7) 改寫成

$$\lambda_1(\bar{x}-h)^2 + e'\bar{y} = f'.$$

我們分成下面幾種情形討論.

(C)  $\lambda_1, \lambda_2$  其中有一個為 0 (不失一般性假設  $\lambda_1 \neq 0, \lambda_2 = 0$ ):

- (1)  $e' \neq 0$ : 此時圖形為 *parabola* (拋物線).
- (2)  $e' = 0$  且  $\lambda_1, f'$  同號: 此時圖形為兩平行直線 (與直線  $\bar{x} = 0$  平行).
- (3)  $e' = 0$  且  $f' = 0$ : 此時圖形為一直線  $\bar{x} = h$ .
- (4)  $e' = 0$  且  $\lambda_1, f'$  異號: 此時圖形為空集合.

**Example 8.3.3.** 考慮二次曲線方程式  $x^2 - 2xy + y^2 + 4\sqrt{2}x = 4$ . 此方程式可用矩陣表示成

$$\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4\sqrt{2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 4.$$

由於

$$\begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

考慮變數變換  $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{bmatrix}$ , 我們得

$$\begin{bmatrix} \bar{x} & \bar{y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4\sqrt{2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{bmatrix} = 4.$$

因此此曲線用新的變數其方程式為  $2\bar{x}^2 + 4\bar{x} + 4\bar{y} = 4$ . 利用配方法得  $(\bar{x}+1)^2 = -4 \cdot \frac{1}{2}(\bar{y} - \frac{3}{2})$ , 故其圖形為拋物線.

總而言之，我們可以從二次曲線的 quadratic form 部分得到其 eigenvalue  $\lambda_1, \lambda_2$ ，然後由  $\lambda_1, \lambda_2$  的正負號判斷此二次曲線應歸類於哪一種曲線。若  $\lambda_1, \lambda_2$  同號，則為橢圓類；而  $\lambda_1, \lambda_2$  異號，則為雙曲線類；而若  $\lambda_1, \lambda_2$  有一個為 0，則為拋物線類。不過最後我們還是得經由配方法求得其一次項與常數項，這樣才能確認此曲線是否為 degenerated (退化) 的情形 (即直線、點或空集合)。

**Question 8.5.** 假設二次曲線方程式的 quadratic form 的部分可表成  $\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ ，中  $A$  為  $2 \times 2$  symmetric matrix. 試問是否可由  $\det(A)$  來判斷此曲線是橢圓類，雙曲線類還是拋物線類？(不考慮退化情形)

**Exercise 8.10.** 將以下的二元二次方程式經由坐標變換寫成標準式。需寫下坐標如何變換。並以新的坐標說明它們為何種二次曲線。以原來的坐標說明其圖形之重要參數 (橢圓：頂點、長、短軸；雙曲線：頂點、貫軸、漸近線；拋物線：頂點、對稱軸)。

- (1)  $3x^2 - 2xy + 3y^2 = 4$ .
- (2)  $16x^2 + 24xy + 9y^2 - 3x + 4y = 5$ .
- (3)  $7x^2 + 12xy - 2y^2 - 2x + 4y = 6$ .

**Exercise 8.11.** 設  $a, b \in \mathbb{R}$  考慮二元二次方程式  $7x^2 + 12xy - 2y^2 - 2ax + 4ay = b$  的圖形。

- (1) 請說明當  $a = 1$  時， $b$  為多少時圖形會是退化的情形？在非退化情形， $b$  改變時漸近線，貫軸，對稱軸方程式是否改變？中心、焦點、頂點坐標是否改變？
- (2) 固定  $b \in \mathbb{R}$ ，請說明當  $a$  為多少時圖形會是退化的情形？在非退化情形， $a$  改變時焦距、貫軸長是否改變？中心、焦點、頂點坐標是否改變？漸近線，貫軸，對稱軸的斜率是否改變？

**Exercise 8.12.** 設  $c, d \in \mathbb{R}$  考慮二元二次方程式  $16x^2 + 24xy + 9y^2 + cx + 4y = d$  的圖形。

- (1) 試找到所有可能的  $c$  使得方程式的圖形為拋物線。
- (2) 試求  $c$  使得圖形為退化情形，並說明此時  $d$  為多少時會使得圖形分別為兩平行直線、一直線和空集合。