

Exercise (Week 1)
September 06, 2024

1. 考慮增廣矩陣

$$[A|\mathbf{b}] = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & -9 \end{array} \right]$$

- (a) 請寫下係數矩陣 A 的 pivot variables、free variables 以及 $\text{rank}(A)$ 。
- (b) 請寫下增廣矩陣 $[A|\mathbf{b}]$ 所對應的聯立方程組，並求此方程組的解集合。
2. 已知矩陣 A 經由 2nd 和 3rd rows 交換的 type 1 的 elementary row operation 變成 A_1 ，再將 A_1 經由 1st row 乘上 -2 加到 2nd row 的 type 3 的 elementary row operation 變成 A_2 ，最後 A_2 經由 3rd row 乘上 $1/2$ 的 type 2 的 elementary row operation 變成 $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{bmatrix}$ 。試依序寫下 A_2, A_1 以及 A 。
3. 考慮 type 1, type 2 以及 type 3 的 elementary row operations.

- (a) 試著利用一些 type 3 以及 type 2 的 elementary row operations 將 $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ 變換成 $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ 。
- (b) 證明所有 type 1 的 elementary row operation 皆可經由三次 type 3 的 elementary row operation 與一次 type 2 的 elementary row operation 得到。
- (c) 利用 elementary row operation 的可逆性以及 (b) 說明某一個 row 乘上 -1 這種 type 2 的 elementary row operation，也可經由三次 type 3 的 elementary row operation 與一次 type 1 的 elementary row operation 得到。
- (d) 說明當 $a \neq \pm 1$ 時，無法經一些 type 1 以及 type 3 的 elementary row operations 將 $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ 變換成 $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix}$ (Hint: 觀察行列式的變化)。(註: 這說明當 $a \neq \pm 1$ 時，某一個 row 乘上 a 這種 type 2 的 elementary row operation 無法經由一些 type 1 和 type 3 的 elementary row operations 得到。)
- (e) 說明無法經一些 type 1 以及 type 2 的 elementary row operations 將 $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ 變換成 $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ (Hint: 觀察 0 的個數變化)。(註: 這說明 type 3 的 elementary row operation 無法經由一些 type 1 和 type 2 的 elementary row operations 得到。)