Exercise (Week 2)

September 13, 2024

1. 試解以下的 system of linear equations。

(a) $\begin{cases} x_1 & +x_2 & -3x_3 & +x_4 & = & 1 \\ x_1 & +x_2 & +x_3 & -x_4 & = & 2 \\ x_1 & +x_2 & -x_3 & & = & 0 \end{cases}$ (b) $\begin{cases} 3x_1 & -x_2 & +2x_3 & +4x_4 & +x_5 & = & 2 \\ x_1 & -x_2 & +2x_3 & +3x_4 & +x_5 & = & -1 \\ 2x_1 & -3x_2 & +6x_3 & +9x_4 & +4x_5 & = & -5 \\ 7x_1 & -2x_2 & +4x_3 & +8x_4 & +x_5 & = & 6 \end{cases}$

2. 令 $\lambda \in \mathbb{R}$, 考慮矩陣

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & \lambda & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & \lambda & 3-\lambda & 6 \\ 2 & 2 & 2 & \lambda & 6 \end{bmatrix}$$

試依照 λ 的取值探討 $\text{rank}(A)$.

3. 已知存在 $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ 使得聯立方程組

$$\begin{array}{rrrcr} 2x_1 & +x_2 & +x_3 & = & -6\beta \\ 2x_1 & +x_2 & +(\alpha+1)x_3 & = & 4 \\ \alpha x_1 & +3x_2 & +2x_3 & = & 2\beta \end{array}$$

有無窮多組解。試找出這些所有可能的數對 (α, β).

4. 假設 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 是一個有三個未知數 x_1, x_2, x_3 的聯立方程組，其中 A 不為零矩陣。已知 $(x_1, x_2, x_3) = (1,2,3)$ 以及 $(x_1, x_2, x_3) = (1,3,3)$ 皆為此聯立方程組的解。

   (a) 試舉例說明 x_3 未必是 pivot variable.

   (b) 說明不管 x_3 是否為 pivot variable, x_2 一定是 free variable.

   (c) 說明若 x_3 是 free variable, 則 x_1 是 pivot variable.

   (d) 試依 x_1, x_3 是否為 pivot variables 的各種情況分別寫下與 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 為 equivalent 的 linear system. (Hint: 共有 3 種可能，利用 reduced echelon form 處理)

5. 試將以下矩陣化為 reduced echelon form. $\begin{bmatrix} -2 & 1 & -5 & -7 & -5 & 4 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

6. 試說明以下矩陣那些可利用 elementary row operations 互換。

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$