Exercise (Week 3)

September 20, 2024

1. 假設 $A=[a_{ij}]\in M_{3\times 4}$, $B=[b_{ij}]\in M_{4\times 3}$ 其中 $a_{ij}=i+j$, $b_{ij}=i\cdot j$.
   (a) 試完整寫下矩陣 A 和 B.
   (b) 試利用 B 的 3rd column 計算 AB 的 3rd column 並依所求結果寫下 AB 的 $(2,3)$-th entry.
   (c) 直接利用高中內積方法計算 AB 的 $(2,3)$-th entry.

2. 一個 $n\times n$ 的方陣（square matrix）其 (i,i)-th entry 稱為 *diagonal entry*. 若除了 diagonal entries 以外, 其他的 entry 皆為 0, 我們便稱之為 *diagonal matrix*. 假設 A,B 皆為 $n\times n$ 的 diagonal matrix 且設 A,B 的 (i,i)-th entry 分別為 a_i,b_i.
   (a) 試證明 $A+B$ 也是 diagonal matrix 且寫下 $A+B$ 的 (i,i)-th entry.
   (b) 試證明 AB 也是 diagonal matrix 且寫下 AB 的 (i,i)-th entry. 並依此說明 A 和 B 是否為 commutative (即是否乘法可交換 $AB=BA$)?

3. 設 $\mathbf{a},\mathbf{b}$ 為 $\mathbb{R}^n$ 上的向量, 若將 $\mathbf{a}$ 寫成 row vector 的形式, $\mathbf{b}$ 寫成 column vector 的形式, 且將 $\mathbf{a},\mathbf{b}$ 看成矩陣, 即 $\mathbf{a}\in M_{1\times n}(\mathbb{R})$, $\mathbf{b}\in M_{n\times 1}(\mathbb{R})$. 試問依矩陣乘法定義 $\mathbf{ba}$、$\mathbf{ab}$ 分別應為幾階矩陣? 它們和 $\mathbf{a},\mathbf{b}$ 看成 $\mathbb{R}^n$ 上的向量後取內積有關嗎？（注意 $\mathbf{ba}$ 的 diagonal entries）

4. 假設 $A=[a_{ij}]\in M_{m\times n}, B=[b_{ij}]\in M_{n\times \ell}$ 且令 $AB=[c_{ij}]$. 令 $\mathbf{b}_k,\mathbf{c}_k$ 分別表示 B 和 AB 的 k-th column. 已知 $\mathbf{b}_4=r\mathbf{b}_1+s\mathbf{b}_2+t\mathbf{b}_3$ 其中 $r,s,t\in\mathbb{R}$. 證明 $\mathbf{c}_4=r\mathbf{c}_1+s\mathbf{c}_2+t\mathbf{c}_3$.

5. 令 A 為 4×6 matrix 且可利用 elementary row operation 化為 reduced echelon form B. 令 $\mathbf{a}_k,\mathbf{b}_k$ 分別表示 A,B 的 k-th column.
   (a) 假設 $\mathbf{a}_4=4\mathbf{a}_1+3\mathbf{a}_3$, 試說明 homogeneous system $A\mathbf{x}=\mathbf{0}$ 有一組解為
   $$(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6)=(4,0,3,-1,0,0).$$
   (b) 證明 $\mathbf{a}_4=4\mathbf{a}_1+3\mathbf{a}_3$ 若且唯若 $\mathbf{b}_4=4\mathbf{b}_1+3\mathbf{b}_3$。（Hint：利用 $A\mathbf{x}=\mathbf{0}$ 和 $B\mathbf{x}=\mathbf{0}$ 有相同的解集合）
   (c) 已知
   $$\mathbf{a}_1=\begin{bmatrix}1\\-2\\-1\\3\end{bmatrix};\quad \mathbf{a}_3=\begin{bmatrix}-1\\1\\2\\-4\end{bmatrix};\quad \mathbf{a}_6=\begin{bmatrix}3\\-9\\2\\5\end{bmatrix};\quad B=\begin{bmatrix}1&-3&0&4&0&5\\0&0&1&3&0&2\\0&0&0&0&1&-1\\0&0&0&0&0&0\end{bmatrix}$$
   試將原先 A 完整的矩陣形式寫下。