

## Exercise (Week 4)

September 27, 2024

1. 假設  $A = [a_{ij}] \in M_{3 \times 4}$ ,  $B = [b_{ij}] \in M_{4 \times 3}$  其中  $a_{ij} = i + j$ ,  $b_{ij} = i \cdot j$ .
  - (a) 試完整寫下矩陣  $A^t$  和  $B^t$ .
  - (b) 請說明  $(AB)^t$  哪個 row 或是 column 會是  $AB$  的 3rd column (忽略橫寫或直寫)。並利用  $(AB)^t$  寫成  $A^t, B^t$  的乘法 (注意順序) 求出  $AB$  的 3rd column。
2. 給定一實係數多項式  $f(x) = a_m x^m + \cdots + a_1 x + a_0 \in \mathbb{R}[x]$ . 對任意  $n$  階方陣  $A$ , 定義  $f(A)$  為  $n$  階方陣  $a_m A^m + \cdots + a_1 A + a_0 I_n$ , 其中  $I_n$  為  $n$  階單位矩陣.
  - (a) 若  $A$  和  $B$  為 commutative, 證明對任意正整數  $k, l$  皆有  $A^k$  和  $B^l$  為 commutative.
  - (b) 假設  $f(x), g(x) \in \mathbb{R}[x]$ . 若  $A$  和  $B$  為 commutative, 證明矩陣  $f(A)$  和  $g(B)$  亦為 commutative.
3. 令  $A = [a_{ij}]$  為 4 階方陣, 其中  $a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{if } i \neq j; \\ 0, & \text{if } i = j. \end{cases}$  若存在 4 階 square matrix  $B$  使得  $BA = AB = I_4$ , 則稱  $A$  為 invertible matrix 且稱  $B$  為其 inverse, 記為  $A^{-1}$ .
  - (a) 請用 row 的看法分別計算  $A^2$  的每個 row.
  - (b) 找到一個 2 次多項式  $f(x)$  滿足  $f(A)$  為零矩陣, 並依此說明  $A$  為 invertible 且寫下  $A^{-1}$ .
4. 固定一正整數  $n$ , 本題只考慮  $n$  階方陣。
  - (a) 假設  $A$  和  $B$  皆為 symmetric matrices. 證明  $AB$  為 symmetric matrix 若且唯若  $A, B$  為 commutative (乘法可交換)。
  - (b) 試說明 elementary matrix 的 transpose 亦為 elementary matrix (需說明原來對應的 elementary row operation 轉置後其所對應的 elementary row operation 為何)。並說明哪些 type 的 elementary matrix 是 symmetric.
  - (c) 這些 symmetric elementary matrices 中哪些相乘後仍為 symmetric? 並利用 (a) 小題的結果說明這些 symmetric elementary matrices 哪些是 commutative.

5. 考慮矩陣  $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ .

- (a) 利用一些 elementary row operations 將  $A$  化成 reduced echelon form. 寫下每個 elementary row operation 所對應的 elementary matrix.
- (b) 寫下  $A^{-1}$  並將  $A^{-1}$  寫成一些 elementary matrix 的乘積 (不必乘開驗證)。
- (c) 利用 (b) 的結果將  $A$  寫成一些 elementary matrix 的乘積 (不必乘開驗證)。