

## Exercise (Week 5)

October 04, 2024

1. 令  $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ ,  $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ ,  $M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$  且令  $A'$  為  $A$  的

reduced echelon form.

- (a) 試求  $\text{rank}(A)$  並說明對任意  $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^k$  聯立方程組  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  皆在  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^\ell$  有解，其中  $k, \ell$  為何？
- (b) 假設對任意聯立方程組  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  皆會和  $A'\mathbf{x} = \mathbf{b}'$  為 equivalent。試找到一個矩陣  $E$  使得  $E\mathbf{b} = \mathbf{b}'$ 。
- (c) 試找到無窮多個  $C$  滿足  $AC = I_4$ 。並說明這些  $C$  皆滿足  $A'C = E$ ，其中  $E$  為 (b) 小題的  $E$ ，並依此說明 (b) 的  $E$  是唯一的。
- (d) 試利用對  $A'$  做 elementary column operations 的方式，找到  $5 \times 5$  matrix  $E'$  使得  $EAE' = M$ 。
- (e) 利用  $B$  和  $A$  的關係以及 (c) 的結果，試找到無窮多個 matrix  $C'$  使得  $C'B = I_4$ 。
- (f) 試找到一個 invertible matrix  $E'$  使得  $E'B$  為 reduced echelon form, 並將  $E'$  的某些行或列去掉之後找到  $C'$  使得  $C'B = I_4$ 。

2. 考慮聯立方程組 
$$\begin{cases} x & + & z & = & 1 \\ x & + & y & & = & 2 \\ 3x & + & y & + & z & = & 1 \\ & & y & + & z & = & 2 \end{cases}, \text{ 令 } A \text{ 為其係數矩陣且令 } \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

- (a) 求  $\text{rank}(A)$  並利用  $\text{rank}$  說明此聯立方程組若有解其解唯一（請勿直接解此方程組）。
- (b) 請利用 elementary row operations 找到兩個相異矩陣  $E_1, E_2$  使得  $E_1A, E_2A$  皆為  $A$  的 reduced echelon form。
- (c) 請利用 (b) 所得的  $E_1, E_2$  找出兩個相異矩陣  $D_1, D_2$  使得  $D_1A = D_2A = I_3$ 。
- (d) 請利用 (c) 所得的  $D_1, D_2$  說明方程組  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  若有解其解應為何？是  $D_1\mathbf{b}$  或是  $D_2\mathbf{b}$ ？此結果是否與 (a) 的唯一性相違背？
- (e) 將 (d) 所得的可能解代回聯立方程組說明此聯立方程組是否有解。

3. 給定一  $m \times n$  matrix  $A$ ，其中  $m \neq n$ . 假設  $B$  為  $n \times m$  matrix 滿足  $AB = I_m$ .
- (a) 說明  $m < n$ ，並依此說明對任意  $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ ，聯立方程組  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  皆存在無窮多組解。
  - (b) 試說明對任意  $k \in \mathbb{N}$ ，皆存在無窮多  $n \times k$  的矩陣  $C$  使得  $AC$  為  $m \times k$  的零矩陣。
  - (c) 試說明對任意  $k \in \mathbb{N}$  僅有一個  $k \times m$  的矩陣  $D$  使得  $DA$  為  $k \times n$  的零矩陣。
  - (d) 是否存在矩陣使得  $BM = I_n$ ？
  - (e) 是否存在無窮多個矩陣使得  $NB = I_m$ ？
  - (f) 是否存在非零矩陣  $C$  使得  $BC$  為零矩陣？
  - (g) 是否存在非零矩陣  $D$  使得  $DB$  為零矩陣？