Exercise (Week 7)

October 18, 2024

1. 假設 A 為 n 階 square matrix 且 $A^2=O$，其中 O 為 n 階零方陣。證明 A 為 non-invertible 但 I_n-A 為 invertible (Hint 利用 $I_n-A^2=(I_n-A)(I_n+A)$)。請推廣到一般 $A^k=O$ 的情況。

2. 課堂上我們利用 constructive 的方法證明了若 A,B 為 invertible，則 AB 亦為 invertible。也就是說我們直接建構出 AB 的反矩陣 $B^{-1}A^{-1}$。請依照這樣的想法處理以下問題。

   (a) 假設 A,B 為方陣且 AB 為 invertible。請用 constructive 的方式找到 A, B 的反矩陣（也因此證明了 A,B 皆為 invertible）。注意：所找的反矩陣，必需用已知的矩陣表達，也就是僅能用 $A,B,AB,(AB)^{-1}$ 表達（不能用 A^{-1},B^{-1}）。另外要注意，論述中一定要用到 A,B 是方陣的假設。

   (b) 假設 A 為 $m\times n$ matrix, B 為 $n\times m$ matrix 滿足 $AB-I_m$ 為 invertible，我們想用 constructive 的方法證明 $BA-I_n$ 也是 invertible。為了方便起見我們用 C 表示 $AB-I_m$ 的反矩陣 $(AB-I_m)^{-1}$，也就是說，我們要用已知的矩陣例如 A,B,C,I_n 來表示 $BA-I_n$ 的反矩陣。

      i. 利用矩陣乘法結合律以及分配律，找到一個矩陣 D（注意階數）滿足 $B(AB-I_m)=(BA-D)B$。

      ii. 利用 C 為 $AB-I_m$ 的反矩陣以及上一題找到的 D 證明 $BA=(BA-I_n)BCA$，因此得到 $I_n=(BA-I_n)BCA-BA+I_n$。

      iii. 利用分配律，具體寫下 $BA-I_n$ 的反矩陣。說明此論述是否需要 A,B 為方陣（即 $m=n$）的要求。

3. 用 constructive 的方式證明存在性，有時是很困難的（例如上一題的 (b)）。我們也可考慮用 nonconstructive 的方式（即純粹用理論）處理存在性。

   (a) 假設 A 為 n 階方陣。證明 A 為 invertible 若且唯若當 $\mathbf{v}\in\mathbb{R}^n$ 滿足 $A\mathbf{v}=\mathbf{0}$，則 $\mathbf{v}=\mathbf{0}$。

   (b) 假設 A 為 n 階方陣。證明 A 為 invertible 若且唯若對任意 $\mathbf{v}\in\mathbb{R}^n$ 皆存在 $\mathbf{w}\in\mathbb{R}^n$ 使得 $A\mathbf{w}=\mathbf{v}$。

   (c) 已知 A,B 為 n 階 invertible matrices。假設 $\mathbf{v}\in\mathbb{R}^n$ 滿足 $(AB)\mathbf{v}=\mathbf{0}$，利用 (a) 證明 $\mathbf{v}=\mathbf{0}$（因此再由 (a) 得知 AB 為 invertible）。

   (d) 已知 AB 為 n 階 invertible matrix。假設 $\mathbf{v}\in\mathbb{R}^n$ 滿足 $B\mathbf{v}=\mathbf{0}$，利用 (a) 證明 $\mathbf{v}=\mathbf{0}$（因此再由 (a) 得知 B 為 invertible）。

   (e) 已知 AB 為 n 階 invertible matrices。任取 $\mathbf{v}\in\mathbb{R}^n$，利用 (b) 證明存在 $\mathbf{u}\in\mathbb{R}^n$ 使得 $A\mathbf{u}=\mathbf{v}$（因此再由 (b) 得知 A 為 invertible）。

   (f) 假設 A 為 $m\times n$ matrix, B 為 $n\times m$ matrix。已知 $AB-I_m$ 為 invertible。假設 $\mathbf{v}\in\mathbb{R}^n$ 滿足 $(BA-I_n)\mathbf{v}=\mathbf{0}$，利用 (a) 證明 $\mathbf{v}=\mathbf{0}$（因此再由 (a) 得知 $BA-I_n$ 為 invertible）。

請翻頁

4. 考慮集合 $S=\{1,2\}$, 以及 vector space $\mathbb{R}^3$ (一般的加法與係數積). 令 $F(S,\mathbb{R}^3)$ 為所有 S 到 $\mathbb{R}^3$ 的函數所成的集合. 對任意 $f,g\in F(S,\mathbb{R}^3)$, $r\in\mathbb{R}$ 定義

$$(f+g)(1)=f(1)+g(1),\quad (f+g)(2)=f(2)+g(2)$$

以及

$$(rf)(1)=r\cdot f(1),(rf)(2)=r\cdot f(2)$$

已知 $F(S,\mathbb{R}^3)$ 在此定義之下是一個 over $\mathbb{R}$ 的 vector space.

(a) 若 $h\in F(S,\mathbb{R}^3)$ 是此空間的零向量, 請寫下 $h(1),h(2)$.

(b) 若 $h_1\in F(S,\mathbb{R}^3)$ 滿足

$$h_1(1)=(-1,2,-1),h_1(2)=(2,0,1)$$

試依定義檢查 $(-2)h_1=-(2h_1)$.

(c) 承 (b) 若又考慮 $h_2\in F(S,\mathbb{R}^3)$ 滿足

$$h_2(1)=(0,1,2),h_2(2)=(1,2,3)$$

試寫下 $3h_2-2h_1$ 在 1, 2 的函數值.

5. 考慮集合 $U=\{(a,b):a,b\in\mathbb{R},a>0$ 且 $b>0\}$. 定義 U 上的加法運算為:

$$\mathbf{u}+\mathbf{v}=(ac,bd),\forall\mathbf{u}=(a,b),\mathbf{v}=(c,d)\in U.$$

另外對任意 $r\in\mathbb{R}$, $\mathbf{u}=(a,b)\in U$ 定義係數積 $r\mathbf{u}=(a^r,b^r)$. 試回答以下問題.

(a) U 是否為 vector space over $\mathbb{R}$？

(b) 假設 $\mathbf{v}=(25,1/9),\mathbf{w}=(4,1)$ 且 $\mathbf{u}=(x,y)$ 在 U 中滿足 $2\mathbf{u}+3\mathbf{v}=5\mathbf{w}$. 利用定義分別寫下 $2\mathbf{u}+3\mathbf{v}$ 以及 $5\mathbf{w}$ 的坐標表示法, 並依此解出 x,y.

(c) 若給定 $\mathbf{v},\mathbf{w}\in U$ 已知 $\mathbf{u}\in U$ 滿足 $2\mathbf{u}+3\mathbf{v}=5\mathbf{w}$. 試將 $\mathbf{u}$ 寫成 $\mathbf{v},\mathbf{w}$ 的線性組合。特別的，當 $\mathbf{v}=(25,1/9),\mathbf{w}=(4,1)$. 若 $\mathbf{u}\in U$ 滿足 $2\mathbf{u}+3\mathbf{v}=5\mathbf{w}$. 利用上述的線性組合, 解出 $\mathbf{u}$.