Exercise (Week 8)

October 25, 2024

1. 考慮集合 $S=\{1,2\}$, 以及 vector space $\mathbb{R}^3$. $F(S,\mathbb{R}^3)$ 為所有 S 到 $\mathbb{R}^3$ 的函數所成的 vector space （上週習題所定的運算方法）。下列哪些是 $F(S,\mathbb{R}^3)$ 的 subspace, 並說明理由.

$$F_1=\{f\in F(S,\mathbb{R}^3): f(2)=(0,0,0)\};\ F_2=\{f\in F(S,\mathbb{R}^3): f(1)+f(2)=(0,0,0)\}$$

$$F_3=\{f\in F(S,\mathbb{R}^3): f(1)\cdot f(2)=0\};\ F_4=\{f\in F(S,\mathbb{R}^3): f(1)=(x,y,z), xyz=0\}$$

$$F_5=\{f\in F(S,\mathbb{R}^3): f(2)=(x,y,z), x+2y-z=0\}.$$

2. 考慮集合 $U=\{(a,b): a,b\in\mathbb{R}, a>0$ 且 $b>0\}$ 所成的 vector space （上週習題所定的運算方法）。下列哪些是 U 的 subspace, 並說明理由.

$$U_1=\{(x,1): x>0\};\quad U_2=\{(2^r,3^r): r\in\mathbb{R}\};$$

$$U_3=\{(x,y): x>1, y>1\};\quad U_4=\{(x,y): x\geq 1, y\geq 1\}.$$

3. 考慮所有 n 階實方陣所形成 over $\mathbb{R}$ 的 vector space M_n. 令 $W_1=\{A\in M_n: A^{\mathrm{t}}=A\}$, $W_2=\{A\in M_n: A^{\mathrm{t}}=-A\}$, $W_3=\{[a_{ij}]\in M_n: a_{ij}=0, \forall i\leq j\}$.

   (a) 證明 W_1,W_2 為 M_n 的 subspace 且 $W_1+W_2=M_n$. (Hint：對任意方陣 B，$B+B^{\mathrm{t}}$ 一定是 symmetric; $B-B^{\mathrm{t}}$ 呢？)

   (b) 證明 W_3 為 M_n 的 subspace 且 $W_1+W_3=M_n$. （Hint：先試 $n=2$ 的情況。）

4. 假設 V 為 vector space 且 $S\subseteq V$. 證明 S 是 V 的 subspace 若且唯若 $\mathrm{Span}(S)=S$.

5. 在以下的 vector space 中檢查是否 $\mathbf{v},\mathbf{w}$ 在 $\mathrm{Span}(S)$ 中.

   (a) $\mathbf{v}=(-1,1,1,2), \mathbf{w}=(2,-1,1,-3)$, $S=\{(1,0,1,-1),(0,1,1,1)\}$ in $\mathbb{R}^4$.

   (b) $\mathbf{v}=-x^3+2x^2+3x+3, \mathbf{w}=2x^3-x^2+x+3$, $S=\{x^3+x^2+x+1, x^2+x+1, x+1\}$ in $P_3(\mathbb{R})$.

   (c) $\mathbf{v}=\begin{bmatrix}1 & 2\\ -3 & 4\end{bmatrix}, \mathbf{w}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$, $S=\left\{\begin{bmatrix}1 & 0\\ -1 & 0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}\right\}$ in $M_2(\mathbb{R})$.

6. 在 $M_2(\mathbb{R})$ 中令 $W=\{A\in M_2(\mathbb{R}): A^{\mathrm{t}}=A\}$ 以及

$$A_1=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}, A_2=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}, A_3=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}, A_4=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}, A_5=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{bmatrix}, A_6=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}.$$

   證明 $W=\mathrm{Span}(A_1,A_2,A_3)$ 並利用 $\mathrm{Span}(S)$ 是包含 S 的最小向量空間的概念說明 $W\subsetneq\mathrm{Span}(A_1,A_2,A_4,A_5)$ 以及 $W\supsetneq\mathrm{Span}(A_3,A_6)$.