Exercise (Week 9)

November 01, 2024

1. 請決定以下集合是否為其所屬的 vector space 中的一組 basis.

   (a) In $\mathbb{R}^3$,
   $$S_1 = \{(1,2,-1),(1,0,2),(2,1,1)\}, \quad S_2 = \{(1,-3,-2),(-3,1,3),(-2,10,-2)\}.$$

   (b) In $P_2(\mathbb{R})$,
   $$S_3 = \{-2x^2-2x+1, x^2-3x+2, 6x^2-x+1\},$$
   $$S_4 = \{x^2-2x-1, x^2-2x+4, 9x^2-18x+1\}.$$

2. 令 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & -1 \\ 3 & 2 & 5 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$. 試求 A 的 nullity 並寫下 $N(A)$ 的一組 basis.

3. 考慮所有 2×3 實矩陣所形成的 vector space 中的一個 subspace
   $$V = \left\{ \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix} : a_1 - a_2 + 2b_1 - 3b_2 + b_3 = 2a_1 - a_2 - a_3 + 3b_1 - 4b_2 + 4b_3 = 0 \right\}.$$
   考慮 $M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

   (a) 試找到 V 的一組 basis.（利用 null space 找 basis 方法）

   (b) 說明 $M_1, M_2 \in V$ 且 M_1, M_2 為 linearly independent.

   (c) 擴充 M_1, M_2 使其形成 V 中的一組 basis.

4. 假設 V 為 vector space over $\mathbb{R}$ 且 $\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_n \in V$。已知 $\mathbf{w}_1,\ldots,\mathbf{w}_n \in \mathrm{Span}(\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_n)$ 且為 linearly independent。證明 $\mathrm{Span}(\mathbf{w}_1,\ldots,\mathbf{w}_n) = \mathrm{Span}(\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_n)$（注意要用到 n）並證明 $\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_n$ 也是 linearly independent。

5. 假設 V 為 vector space over $\mathbb{R}$ 且 $\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_3 \in V$ 為 linearly independent. 令
   $$\mathbf{w}_1 = a_1\mathbf{v}_1 + b_1\mathbf{v}_2 + c_1\mathbf{v}_3,\ \mathbf{w}_2 = a_2\mathbf{v}_1 + b_2\mathbf{v}_2 + c_2\mathbf{v}_3,\ \mathbf{w}_3 = a_3\mathbf{v}_1 + b_3\mathbf{v}_2 + c_3\mathbf{v}_3,$$
   以及 $A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}$.

   (a) 試說明滿足 $x_1\mathbf{w}_1 + x_2\mathbf{w}_2 + x_3\mathbf{w}_3 = 0$ 的 x_1, x_2, x_3 需符合哪一個聯立方程組？(請注意是否需要 $\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_3$ 為 linearly independent)

   (b) 證明 $\mathbf{w}_1,\mathbf{w}_2,\mathbf{w}_3$ 為 linearly independent 若且唯若 A 為 invertible.

   (c) 試推廣到更一般的情況，即假設 $\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_n$ 為 linearly independent。如何利用矩陣來判斷 $\mathbf{w}_1,\ldots,\mathbf{w}_m \in \mathrm{Span}(\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_n)$ 為 linearly independent。(注意 m 未必等於 n 所以矩陣未必是方陣。)

6. 令 V 為 vector space 且 U,W 為其 subspace.

   (a) 假設 $\mathbf{u}_1,\ldots,\mathbf{u}_m \in U$ 為 linearly independent，$\mathbf{w}_1,\ldots,\mathbf{w}_n \in W$ 也是 linearly independent。已知 $U \cap W = \{\mathbf{0}\}$，證明 $\mathbf{u}_1,\ldots,\mathbf{u}_m,\mathbf{w}_1,\ldots,\mathbf{w}_n$ 為 linearly independent.

   (b) 假設 $\mathbf{u}_1,\ldots,\mathbf{u}_m \in U$ 為 U 的一組 basis，$\mathbf{w}_1,\ldots,\mathbf{w}_n \in W$ 為 W 的一組 basis。已知 $\mathbf{u}_1,\ldots,\mathbf{u}_m,\mathbf{w}_1,\ldots,\mathbf{w}_n$ 為 linearly independent，證明 $U \cap W = \{\mathbf{0}\}$。

   (c) 假設 $\mathbf{u}_1,\ldots,\mathbf{u}_m \in U$ 為 U 的一組 basis，$\mathbf{w}_1,\ldots,\mathbf{w}_n \in W$ 為 W 的一組 basis。證明 $\mathbf{u}_1,\ldots,\mathbf{u}_m,\mathbf{w}_1,\ldots,\mathbf{w}_n$ 為 $U+W$ 的一組 basis 若且唯若 $U \cap W = \{\mathbf{0}\}$。

7. 考慮所有 n 階實方陣所形成 over $\mathbb{R}$ 的 vector space M_n. 令 $W_1 = \{A \in M_n : A^{\mathrm{t}} = A\}$, $W_2 = \{A \in M_n : A^{\mathrm{t}} = -A\}$, $W_3 = \{[a_{ij}] \in M_n : a_{ij} = 0, \forall i \leq j\}$.

   (a) 試分別找出 W_1,W_2,W_3 的一組 basis，並依此決定 W_1,W_2,W_3 的維度。

   (b) 上一大題告訴我們可以用交集的情形處理 linearly independent 的性質（有時找交集比證明線性獨立簡單）。試利用交集的看法說明 (a) 小題中找的 W_1,W_2 的 basis 放在一起仍為 independent。同樣的說明 W_1,W_3 的基底放在一起，以及 W_2,W_3 的基底放在一起是否依然為 independent。最後若三組基底都放在一起是否仍為 independent?

   (c) 在 week 8 習題 3. 我們用 constructive 的方法證明了 $W_1+W_2 = M_n$ 以及 $W_1+W_3 = M_n$。試利用 $\dim M_n = n^2$ 以及 (b) 的結果證明 $W_1+W_2 = W_1+W_3 = M_n$，並證明 W_2+W_3 為所有對角線為 0 的 n 階實方陣所形成的 vector space。

8. 假設 U,W 為 V 的 subspace。已知 $\dim(U+W) = \dim(U \cap W)+1$。

   (a) 試利用 subspace 之間維度的關係證明 $W \subseteq U$ 或 $U \subseteq W$ 且 $\dim U$ 和 $\dim W$ 的差為 1。(Hint：$U \cap W \subseteq U \subseteq U+W$)、

   (b) 假設 $U \not\subseteq W$，令 $\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_n$ 為 $U \cap W$ 的一組 basis。且考慮 $\mathbf{u} \in U$ 但 $\mathbf{u} \notin W$。證明 $\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_n,\mathbf{w}$ 為 linearly independent，也因此證明 $\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_n,\mathbf{w}$ 為 $U+W$ 的一組 basis。並依此重新證明 (a) 的結果。

   (c) 試找到例子滿足 $\dim(U+W) = \dim(U \cap W)+2$，但 $W \not\subseteq U$ 且 $U \not\subseteq W$。