Exercise (Week 10)
November 06, 2024

1. 考慮所有次數小於等於 2 的實係數多項式所形成的 vector space $P_2(\mathbb{R})$. 令

$$S = \{2x^2-3x+1, x^2+4x-2, -8x^2+12x-4, x^2+37x-17, -3x^2-5x+8\}$$

且令 $V = \mathrm{Span}(S)$. (Hint: 可將 $P_2(\mathbb{R})$ 的元素看成 $\mathbb{R}^3$ 的向量。例如 $2x^2-3x+1$ 看成 $(2,-3,1)$.)

(a) 試找到 S 的一個 subset 形成 V 的一組 basis.

(b) 試將 S 中其他的元素寫成 (a) 中所得的 basis 的 linear combination.

(c) 試說明 V 是否等於 $P_2(\mathbb{R})$.

2. 考慮 $\mathbb{R}^7$ 中的向量 $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -4 \\ 1 \\ 3 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -3 \\ 1 \\ 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ -2 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ 且令 $V = \mathrm{Span}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4)$.

(a) 試找到矩陣 A 使得 $V = \mathrm{Col}(A)$, 且將 A 化成 echelon form 並說明如何依此找到 V 的一組 basis.

(b) 試找到矩陣 B 使得 $V = \mathrm{Row}(B)$, 且將 B 化成 reduced echelon form 並說明如何依此找到 V 的一組 basis.

(c) 試將 (a), (b) 其中一組 basis 寫成另一組 basis 的線性組合.

3. 設 A, B 分別為 $m \times n$ 與 $n \times k$ 階矩陣。令 $C = AB$。

(a) 說明若 $\mathbf{v}$ 是聯立方程 $B\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 的一組解，則 $\mathbf{v}$ 亦為聯立方程 $C\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 的一組解，並依此說明 $N(B)$ 和 $N(AB)$ 的包含關係。

(b) 利用 (a) 的結果以及 dimension theorem 說明 $\mathrm{rank}(B)$ 和 $\mathrm{rank}(AB)$ 的大小關係。

(c) 若 $\mathbf{v}$ 是聯立方程 $C\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 的一組解，試找到聯立方程 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 的一組解，並利用方程組有解與 column space 的關連，說明 $\mathrm{Col}(A)$ 和 $\mathrm{Col}(AB)$ 的包含關係。

(d) 說明當 $k \geq n$ 時 $\mathrm{nullity}(A)$ 和 $\mathrm{nullity}(AB)$ 的大小關係。並舉例說明在其他情況（即 $k < n$）$\mathrm{nullity}(A)$ 和 $\mathrm{nullity}(AB)$ 並無一定的大小關係。

4. 設 A, B 分別為 $m\times n$ 與 $n\times m$ 階矩陣。已知 AB 為 invertible。

   (a) 試利用 $\operatorname{rank}(AB)$ 與 $\operatorname{rank}(A), \operatorname{rank}(B)$ 的關係，說明 $\operatorname{rank}(A)$ 與 $\operatorname{rank}(B)$ 為何。

   (b) 說明 $\operatorname{nullity}(A)$ 與 $\operatorname{nullity}(B)$ 為何。

   (c) 係數矩陣為 A 的聯立方程組和係數矩陣為 B 的聯立方程組，哪一個有解的話會有唯一解？哪一個一定有解？(請用 (a),(b) 所算的 rank 和 nullity 回答)

5. 令 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & -1 \\ 3 & 2 & 5 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

   (a) 試求 A 的 nullity 並寫下 $N(A)$ 的一組 basis.

   (b) 試分別利用 elementary row operations 將 A 及 A^{t} 做變成 echelon forms，並依此找到 $\operatorname{Row}(A)$ 的兩組 bases.

   (c) 說明 $N(A)$ 和 $\operatorname{Row}(A)$ 的關係 (Hint：觀察內積)。

6. 考慮 $\mathbb{R}^4$ 中的 subspaces U, W。其中 $\mathbf{u}_1 = (1,1,1,1), \mathbf{u}_2 = (1,0,2,0), \mathbf{u}_3 = (0,2,1,1)$ 為 U 的一組 basis; $\mathbf{w}_1 = (3,0,3,1), \mathbf{w}_2 = (3,2,3,2), \mathbf{w}_3 = (2,-1,2,0))$ 為 W 的一組 basis。

   (a) 找到矩陣 B_1, B_2 使得 $U = N(B_1)$, $W = N(B_2)$, 並以此找出 $U\cap W$ 的一組 basis.

   (b) 試找到向量空間

   $$\{(c_1,c_2,c_3,d_1,d_2,d_3)\in\mathbb{R}^6 : c_1\mathbf{u}_1 + c_2\mathbf{u}_2 + c_3\mathbf{u}_3 = d_1\mathbf{w}_1 + d_2\mathbf{w}_2 + d_3\mathbf{w}_3\}$$

   的一組 basis，並依此找到 $U\cap W$ 的一組 basis.

   (c) 利用 (a) 或 (b) 所得的 $U\cap W$ 的一組 basis 分別擴充成 U, W 以及 $U+W$ 的 bases. 並驗算

   $$\dim(U+W) = \dim(U) + \dim(W) - \dim(U\cap W).$$