Exercise (Week 12)

November 22, 2024

1. 假設 V 為 vector space 且 $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ 為其 basis. 考慮 V 上的一個 inner product $\langle , \rangle$. 已知 $\|\mathbf{v}_1\| = 1$, $\|\mathbf{v}_2\| = 9$ 且 $\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rangle = -1$. 若 $\mathbf{w}_1 = 2\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2$, $\mathbf{w}_2 = \mathbf{v}_1 + 2\mathbf{v}_2$, 試求 $\langle \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2 \rangle$.

2. 當 $A = [a]$ 為 1×1 matrix, 我們定義 $\det(A) = a$, 而當 $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ 為 2×2 matrix, 我們定義 $\det(A) = ad - bc$.
   (a) 試說明 $\langle A, B \rangle = \det(B^{\mathrm{t}}A)$, $\forall A, B \in M_{2\times 1}(\mathbb{R})$ 是否為 $M_{2\times 1}(\mathbb{R})$ 的 inner product?
   (b) 試說明 $\langle A, B \rangle = \det(B^{\mathrm{t}}A)$, $\forall A, B \in M_{1\times 2}(\mathbb{R})$ 是否為 $M_{1\times 2}(\mathbb{R})$ 的 inner product?

3. 考慮次數不大於 2 的實係數多項式所形成的向量空間 $P_2(\mathbb{R})$.
   (a) 試說明
   $$\langle f, g \rangle = f(-1)g(-1) + f(1)g(1), \forall f, g \in P_2(\mathbb{R})$$
   是否為 $P_2(\mathbb{R})$ 的 inner product?
   (b) 試說明
   $$\langle f, g \rangle = f(-1)g(-1) + f(1)g(1) + f(-2)g(-2) + f(2)g(2), \forall f, g \in P_2(\mathbb{R})$$
   是否為 $P_2(\mathbb{R})$ 的 inner product?
   (c) 若定義
   $$\langle f, g \rangle = f(-1)g(-1) + f(0)g(0) + f(1)g(1), \forall f, g \in P_2(\mathbb{R}).$$
   試求 $\|x^2\|, \|x\|, \|1\|$ 以及 $\|x^2 + x + 1\|$.

4. 對任意 V 中的子集合 S 定義 $S^\perp = \{\mathbf{v} \in V : \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = 0, \forall \mathbf{w} \in S\}$.
   (a) 若 $S \subseteq V$, 證明 $S^\perp$ 為 V 的一個 subspace.
   (b) 證明 $S^\perp = \mathrm{Span}(S)^\perp$.
   (c) 假設 $S_1 \subseteq S_2$ 皆為 V 的 subset, 證明 $S_2^\perp \subseteq S_1^\perp$.
   (d) 證明 $S \subseteq (S^\perp)^\perp$, 並依此說明 $\mathrm{Span}(S) \subseteq (S^\perp)^\perp$.

5. 考慮 V 為 finite dimensional inner product space.
   (a) 假設 W 為 V 的 subspace, 證明若 $\mathbf{v} \notin W$, 則存在 $\mathbf{u} \in W^\perp$ 使得 $\langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle \neq 0$.
   (b) 假設 W_1, W_2 為 V 的 subspace, 證明 $(W_1 + W_2)^\perp = W_1^\perp \cap W_2^\perp$.
   （註：不需 V 為 finite dimensional）
   (c) 假設 W_1, W_2 為 V 的 subspace, 證明 $W_1^\perp + W_2^\perp = (W_1 \cap W_2)^\perp$.