Exercise (Week 13)

November 29, 2024

1. 假設 $\mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_n$ 為 V 的一組 orthonormal basis.

   (a) 假設 $\mathbf{u},\mathbf{w}\in V$ 且 $\mathbf{u}=a_1\mathbf{v}_1+\cdots+a_n\mathbf{v}_n$ 且 $\mathbf{w}=b_1\mathbf{v}_1+\cdots+b_n\mathbf{v}_n$. 證明

   $$\langle\mathbf{u},\mathbf{w}\rangle=a_1b_1+\cdots+a_nb_n=\sum_{i=1}^{n}\langle\mathbf{u},\mathbf{v}_i\rangle\langle\mathbf{w},\mathbf{v}_i\rangle.$$

   (b) 令 $W=\mathrm{Span}(\mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_k)$ 其中 $1\le k<n$. 對任意 $\mathbf{v}\in V$, 證明

   $$\|\mathbf{v}\|^2\ge\sum_{i=1}^{k}\langle\mathbf{v},\mathbf{v}_i\rangle^2,$$

   且等號成立若且唯若 $\mathbf{v}\in W$.

2. 在 $\mathbb{R}^4$ 中考慮 dot product. 令 $W=\mathrm{Span}\big((2,-1,-2,4),(-2,1,-5,5),(-1,3,7,11)\big)$

   (a) 利用 Gram-Schmidt Process 找到 W 上的一組 orthogonal basis, 並將之擴大成 $\mathbb{R}^4$ 的一組 orthogonal basis。依此寫下 $W^\perp$ 的一組 basis.

   (b) 試將 $\mathbf{v}=(-45,-50,5,25)$ 寫成 $\mathbf{v}=\mathbf{u}+\mathbf{w}$，其中 $\mathbf{u}\in W^\perp$, $\mathbf{w}\in W$，並求 $\mathbf{v}$ 分別在 W 以及 $W^\perp$ 上的 orthogonal projection.

3. 考慮 $P_2(\mathbb{R})$ 上的 inner product 定義為

   $$\langle f,g\rangle=f(1)g(1)+f(0)g(0)+f(-1)g(-1),\ \forall f,g\in P_2(\mathbb{R}).$$

   (a) 針對 $P_2(\mathbb{R})$ 上 $x^2,1,x$ 這組 basis, 利用 Gram-Schmidt Process 找到 $P_2(\mathbb{R})$ 上的一組 orthonormal basis（請依照 $x^2,1,x$ 的順序，以方便處理下一小題）。

   (b) 試求 $(x+1)^2$ 在 $\mathrm{Span}(x^2,1)$ 上的 orthogonal projection.

4. 在 $\mathbb{R}^3$ 中考慮 dot product. 令 $W=\{(x,y,z):x+3y-2z=0\}$ 以及 $\mathbf{v}=(2,1,3)$.

   (a) 找到矩陣 A 使得 $W=N(A)$, 以及 W 的一組 orthogonal basis 並求 $\mathbf{v}$ 在 W 的 orthogonal projection.

   (b) 利用 $N(A)^\perp=\mathrm{Col}(A^{\mathrm{t}})$ 求出 $W^\perp$ 的一組 basis 並說明此 basis 和高中學的 W 所在平面 $E:x+3y-2z=0$ 有何關係. 利用高中的方法求點 $P(2,1,3)$ 在平面 E 的投影.