Exercise (Week 14)

December 06, 2024

1. 假設 $A \in M_{m\times n}$ 且 $\operatorname{rank}(A)=n$. 令 P 表示投影到 $\operatorname{Col}(A)$ 的投影矩陣. 請利用 A, A^{t} 表示 P 並利用矩陣乘法性質 (不要用投影概念) 證明以下敘述:
   (a) 若 $\mathbf{w} \in \operatorname{Col}(A)$, 則 $P\mathbf{w}=\mathbf{w}$. (Hint: $\mathbf{w}=A\mathbf{x}$ for some $\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n$)
   (b) 若 $\mathbf{v} \in \operatorname{Col}(A)^{\perp}$, 則 $P\mathbf{v}=\mathbf{0}$. (Hint: $\mathbf{v}\in N(B)$ for some matrix B. what's B?)

2. 考慮 $\mathbb{R}^3$ 利用 dot product 所成的 inner product space. 令

$$W=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x-2y+z=0\}.$$

   以下我們用兩種方法求對 W 的投影矩陣.
   (a) 找出 W 的一組 basis, 並利用此組 basis 得到矩陣 A 使得 $\operatorname{Col}(A)=W$.
   (b) 利用 (a) 中所得的 A 寫下對 W 的投影矩陣 (請將矩陣具體乘開).
   (c) 找出 $W^{\perp}$ 的一組 basis, 並利用此組 basis 得到矩陣 B 使得 $\operatorname{Col}(B)=W^{\perp}$.
   (d) 利用 (c) 中所得的 B 寫下對 $W^{\perp}$ 的投影矩陣, 並依此寫下對 W 的投影矩陣.

3. 假設矩陣 A 的 column vectors 從左至右依序為

$$\mathbf{w}_1=(1,3,1,1), \mathbf{w}_2=(1,1,1,1), \mathbf{w}_3=(-1,5,2,2)$$

   利用 Gram-Schmidt 在 dot product 之下可得到 orthonormal basis $\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\mathbf{u}_3$. 令矩陣 Q 的 column vectors 從左至右依序為 $\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\mathbf{u}_3$.
   (a) 試找到矩陣 R 使得 $A=QR$（請確認 R 為 upper triangular matrix），即寫下 A 的 QR decomposition。
   (b) 試利用 A 的 QR decomposition 寫下對 $\operatorname{Col}(A)$ 的投影矩陣。

4. 此題我們用 normal equations 以及 QR decomposition 求 inconsistent system 的 least squares solution。考慮聯立方程組

$$\begin{cases} x & +y & -z & = & 4 \\ 3x & +y & +5z & = & -1 \\ x & +y & +2z & = & 5 \\ x & +y & +2z & = & 1 \end{cases}$$

   (a) 將此聯立方程組寫成 $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$ 的矩陣形式並寫下其 normal equations.
   (b) 利用 normal equations 求原方程組的 least squares solution 以及其 error vector（即 $\mathbf{b}-\operatorname{Proj}_{\operatorname{Col}(A)}(\mathbf{b})$）.
   (c) 利用上一題 (b) 所得對 $\operatorname{Col}(A)$ 的投影矩陣求出原方程組的 error vector.
   (d) 利用 QR decomposition 寫下與 normal equations 等價的方程組，並利用此方程組求出原方程組的 least squares solution.