Exercise (Week 15)

December 11, 2024

1. 考慮二維資料 $\{(-3,9),(-2,6),(0,2),(1,1)\}$. 以下請利用 least squares 的方法分別找到所要求最接近函數並求其 error vectors.

   (a) 常數函數. (b) 一次函數. (c) 二次函數.

2. 考慮二維資料 $\{(x_1,y_1),\ldots,(x_n,y_n)\}$，其中 $x_1,\ldots,x_n$ 不是全等（即存在 $x_i \neq x_j$）。令其 least squares line 為 $y = mx + c$ 且令 $y'_i = mx_i + c$, $i = 1,\ldots,n$。又令 μ_x 為 $x_1,\ldots,x_n$ 的平均數，μ_y 為 $y_1,\ldots,y_n$ 的平均數，以及 $\mu_{y'}$ 為 $y'_1,\ldots,y'_n$ 的平均數。已知 $y = mx + c$ 會通過點 (μ_x,μ_y)。利用講義 Proposition 4.5.5 回答以下問題。

   (a) 說明若 $x_i \neq \mu_x$，則 $m = \dfrac{(y'_i - \mu_{y'})(x_i - \mu_x)}{(x_i - \mu_x)^2}$ 並依此推得 $m = \dfrac{\sum_{i=1}^n (y'_i - \mu_{y'})(x_i - \mu_x)}{\sum_{i=1}^n (x_i - \mu_x)^2}$.

   (b) 證明 $\sum_{i=1}^n (y_i - \mu_y)(x_i - \mu_x) = \sum_{i=1}^n (y'_i - \mu_{y'})(x_i - \mu_x)$ 並依此推得
   $$m = \frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \mu_y)(x_i - \mu_x)}{\sum_{i=1}^n (x_i - \mu_x)^2}.$$

3. 考慮聯立方程組
   $$\begin{cases} x & +2y & +z & = & 4 \\ x & -y & +2z & = & -11 \\ x & +5y & & = & 19 \end{cases}$$
   令其矩陣表示法為 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

   (a) 試求此方程組的解集合.

   (b) 找到此方程組的 minimal solution.

   (c) 將此方程組的 minimal solution 表成 A 的 row vectors 的線性組合 (寫下一組即可).

4. 考慮二維資料 $\{(2,2),(2,3),(2,4)\}$，我們想用找 minimal least squares solution 的方法找到 least squares line $y = mx + c$ 其中 $m^2 + c^2$ 是最小的。

   (a) 寫下 m,c 所需符合的 normal equation，並用此 normal equation 找到其 minimal solution。

   (b) 直接利用 $A^{\mathrm{t}}AA^{\mathrm{t}}\mathbf{x} = A^{\mathrm{t}}\mathbf{b}$ 的方式找到 minimal least squares solution。

   (c) 試證明在更多組二維資料 $\{(x_0,y_1),\ldots,(x_0,y_k)\}$ 的情形，所得的 minimal least squares line 為 $y = \dfrac{x_0\mu_y}{x_0^2+1}x + \dfrac{\mu_y}{x_0^2+1}$。

——————— 期末考加油 ———————