Linear Algebra (II) Exercise (Week 1)

February 21, 2025

1. 假設 A 為 6 階方陣滿足 $A^3 = 2I_6$。試求 $\det(A)$.

2. 考慮形式為 $\begin{bmatrix} A & C \\ O & B \end{bmatrix}$ 的 $(m+n)$ 階方陣 M，其中 A,B 分別為 m 階、n 階方陣, 而 O 為 $n \times m$ 階零矩陣，C 為 $m \times n$ 階矩陣。

   (a) 設 $M = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 & -3 \\ 2 & 10 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$. 請說明寫成題設形式，其中 A, B 矩陣分別為何。請利用 elementary row operations 分別求 $\det A$、$\det B$ 以及 $\det M$。

   (b) 證明在一般情況 $\det M = (\det A)(\det B)$.

3. 假設 $M = \begin{bmatrix} b+8c & 2c-2b & 4b-4c \\ 4c-4a & c+8a & 2a-2c \\ 2b-2a & 4a-4b & a+8b \end{bmatrix}$, $P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$.

   (a) 試求 P^{-1} 並求出 $P^{-1}MP$.

   (b) 說明一般情形，當 A 為可逆矩陣，$\det A$ 和 $\det A^{-1}$ 的關係（Hint: $\det(AB) = \det(A)\det(B)$）.

   (c) 求 $\det(P^{-1}MP)$ 並以此求 $\det(M)$.

4. 假設 $f : M_n \to \mathbb{R}$ 是 multi-linear 且滿足對任意 $A \in M_n$, 若 A 有某兩相鄰的 row 是相同的, 則 $f(A) = 0$. 證明 f 為 alternating（即若 A 某兩相鄰的 row 交換所得矩陣為 A'，則 $f(A') = -f(A)$）.