Linear Algebra (II) Exercise (Week 2)

February 26, 2025

1. 利用數學歸納法 (先從階數小的開始，找到規律性) 求以下 n 階方陣的行列式.

   (a) $A=[a_{ij}]$ 其中 $a_{ij}=\begin{cases} 1, & \text{if } i+j=n+1; \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$

   例如 $n=2$ 時 $A=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$; $n=3$ 時 $A=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

   (b) $B=[b_{ij}]$ 其中 $b_{ij}=\begin{cases} j, & \text{if } i=1; \\ j, & \text{if } i>1 \text{ and } j>i; \\ -j, & \text{if } i>1 \text{ and } j<i; \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$

   例如 $n=2$ 時 $B=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$; $n=3$ 時 $B=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 3 \\ -1 & -2 & 0 \end{bmatrix}$.

2. 以下為探討 Vandermonde matrix. 假設 $c_1,c_2,\ldots,c_{n-1}$ 為相異實數. 考慮多項式

$$f(x)=\det\begin{bmatrix} 1 & c_1 & \cdots & c_1^{n-1} \\ 1 & c_2 & \cdots & c_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & c_{n-1} & \cdots & c_{n-1}^{n-1} \\ 1 & x & \cdots & x^{n-1} \end{bmatrix}.$$

   (a) 例如 $n=3$ 時, $f(x)=\det\begin{bmatrix} 1 & c_1 & c_1^2 \\ 1 & c_2 & c_2^2 \\ 1 & x & x^2 \end{bmatrix}$. 利用對 3-rd row 降階方式，證明此時 $f(x)$ 的最高次項為 $(c_2-c_1)x^2$.

   (b) 當 $n=3$ 時, 說明 c_1,c_2 為 $f(x)=0$ 的兩相異實根, 並依此利用因式定理證明

$$\det\begin{bmatrix} 1 & c_1 & c_1^2 \\ 1 & c_2 & c_2^2 \\ 1 & c_3 & c_3^2 \end{bmatrix}=(c_2-c_1)(c_3-c_2)(c_3-c_1).$$

   (c) 利用數學歸納法證明在一般情形 $f(x)$ 的最高次項為

$$\prod_{1\le i<j\le n-1}(c_j-c_i)x^{n-1}.$$

   試說明 $f(x)=0$ 所有的 $n-1$ 個實根為何，並依此證明

$$\det\begin{bmatrix} 1 & c_1 & \cdots & c_1^{n-1} \\ 1 & c_2 & \cdots & c_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & c_{n-1} & \cdots & c_{n-1}^{n-1} \\ 1 & c_n & \cdots & c_n^{n-1} \end{bmatrix}=\prod_{1\le i<j\le n}(c_j-c_i).$$