

## Linear Algebra (II) Exercise (Week 3)

March 07, 2025

1. 考慮矩陣  $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & 2 \end{bmatrix}$ .

(a) 利用 Cramer's Rule 解聯立方程組  $B\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$ .

(b) 求  $B$  的 cofactor matrix, adjoint matrix 以及 inverse matrix.

2. 假設  $A$  的每一個 entry 皆為整係數的  $n$  階方陣.

(a) 利用數學歸納法證明  $\det A$  為整數.

(b) 若  $A$  為可逆且  $A^{-1}$  的每一個 entry 皆為整數, 證明  $\det A = \pm 1$ .

3. 請證明以下有關於 adjoint matrix 的性質。

(a) 若  $A$  為 upper triangular, 則  $\text{adj}(A)$  亦為 upper triangular.

(b) 若  $A$  為 symmetric, 則  $\text{adj}(A)$  亦為 symmetric.

(c) 若  $A, B$  皆為  $n$  階方陣, 則  $(BA)(\text{adj}(A)\text{adj}(B)) = \det(AB)I_n$ .

(d) 若  $A, B$  皆為  $n$  階 invertible matrix, 則  $\text{adj}(AB) = \text{adj}(B)\text{adj}(A)$ .

4. 以下所定的函數是否為 linear transformation? 若是請證明; 若不是請舉例說明.

(a)  $T_1: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, (x, y, z) \mapsto (|x|, -z, y)$ .

(b) 給定  $B \in M_n$ , 令  $T_2: M_n \rightarrow M_n, A \mapsto AB^2 + BA$ .

(c) 給定  $B \in M_n$ , 令  $T_3: M_n \rightarrow M_n, A \mapsto AB + BA^2$ .

(d)  $P_n$  為次數小於  $n+1$  的多項式所成 vector space, 令  $T_4: P_n \rightarrow P_{n+1}$ ,

$$f(x) \mapsto f(0) + xf(x) + x^2 f'(x).$$