Linear Algebra (II) Exercise (Week 4)

March 14, 2025

1. 考慮函數 $T: M_2 \to M_2$.
   (a) 若已知 $T(A) = A^{\mathrm{t}}, \forall A \in M_2$, 證明 T 為 linear transformation.
   (b) 若已知 T 為 linear transformation 且滿足
   $$T(\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{bmatrix}) = \begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{bmatrix}; T(\begin{bmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{bmatrix}) = \begin{bmatrix}0 & 0\\1 & 0\end{bmatrix};$$
   $$T(\begin{bmatrix}0 & 0\\1 & 0\end{bmatrix}) = \begin{bmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{bmatrix}; T(\begin{bmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}) = \begin{bmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}.$$
   證明 $T(A) = A^{\mathrm{t}}, \forall A \in M_2$.

2. 考慮 $\mathbb{R}^n$ 為 standard inner product space. 已知 $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ 滿足以下保距性質：
   $$(1)\ T(\mathbf{0}) = \mathbf{0}; \quad (2)\ \|T(\mathbf{v}) - T(\mathbf{w})\| = \|\mathbf{v} - \mathbf{w}\|.$$
   (a) 證明 $\|T(\mathbf{v})\| = \|\mathbf{v}\|$ 以及 $\langle T(\mathbf{v}), T(\mathbf{w})\rangle = \langle \mathbf{v}, \mathbf{w}\rangle, \forall \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$
   (b) 考慮 standard basis $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$. 若已知 $T(\mathbf{e}_i) = \mathbf{u}_i, \forall i = 1, \ldots, n$. 證明
   $$T(c_1, \ldots, c_n) = \sum_{i=1}^{n} c_i \mathbf{u}_i.$$
   (c) 證明 T 為 linear transformation.

3. 考慮 $T: V \to V$ 為 linear transformation.
   (a) 若 $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3 \in V$ 皆為非零向量滿足 $T(\mathbf{v}_1) = -\mathbf{v}_1, T(\mathbf{v}_2) = 2\mathbf{v}_2, T(\mathbf{v}_3) = \mathbf{v}_3$. 證明 $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ 為 linearly independent，再證明 $\mathbf{v}_3 \notin \mathrm{Span}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$ 並以此說明 $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ 為 linearly independent.
   (b) 利用數學歸納法證明更一般的情形. 已知 $\mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_n \in V$ 皆為非零向量滿足 $T(\mathbf{v}_1) = c_1\mathbf{v}_1, \cdots, T(\mathbf{v}_n) = c_n\mathbf{v}_n$, 其中 $c_1, \ldots, c_n$ 兩兩相異. 證明 $\mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_n$ 為 linearly independent.

4. $\mathbb{R}^2$ 上的一維子空間 L 皆可由一個非零向量所展成，因此可視為一個通過原點的直線 $L = \{(x, y) \mid ax + by = 0\}$.
   (a) 設 $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ 定義為 $T(x, y) = (x + y, x - y)$ 試利用 a, b 表達 $T(L)$ 和 $T^{-1}(L)$ 為怎樣的子空間。
   (b) 設 $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ 定義為 $T(x, y) = (x + y, x + y)$ 試利用 a, b 表達 $T(L)$ 和 $T^{-1}(L)$ 為怎樣的子空間。

5. 試找到以下 linear transformations 的 kernel 和 image 的 basis.
   (a) $T_1: \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^4$, 定義為
   $$T_1(a, b, c, d, e) = (a - c + 3d - e, a + 2d - e, 2a - c + 5d - e, -c + d).$$
   (b) $T_2: P_2(\mathbb{R}) \to P_3(\mathbb{R})$, 定義為 $T_2(f(x)) = x^2 f'(x)$.