

Linear Algebra (II) Exercise (Week 5)

March 21, 2025

1. 試寫下以下 linear transformations 的 standard matrix representation 並利用所找的矩陣求出其 kernel 和 image 的 basis.

(a) $T_1: \mathbb{R}^5 \rightarrow \mathbb{R}^4$, 定義為

$$T_1(a, b, c, d, e) = (a - c + 3d - e, a + 2d - e, 2a - c + 5d - e, -c + d).$$

(b) $T_2: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, 定義為 $T_2(\mathbf{v}) = [\mathbf{v}]_\beta$, 其中 β 為 $\mathbb{R}^3$ 的一組 ordered basis

$$\beta = (\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_3).$$

2. 假設 $\beta = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4)$ 為 V 的一組 ordered basis. 令

$$\mathbf{w}_1 = \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3 + 3\mathbf{v}_4, \mathbf{w}_2 = -\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3 + 2\mathbf{v}_4,$$

$$\mathbf{w}_3 = 5\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3 + 5\mathbf{v}_4, \mathbf{w}_4 = \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_3 - 3\mathbf{v}_4, \mathbf{w}_5 = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2.$$

- (a) 依照 $\mathbf{w}_i$ 編號由小到大寫下 V 的一組 ordered basis β' .
- (b) 假設 $T_{\beta'}$ 為用 β' 將 V 坐標化的函數, 試寫下 $T_{\beta'}(\mathbf{v}_i)$, $i = 1, 2, 3, 4$.
- (c) 說明方陣 $(T_\beta(\mathbf{w}_1), T_\beta(\mathbf{w}_2), T_\beta(\mathbf{w}_4), T_\beta(\mathbf{w}_5))$ 和 $(T_{\beta'}(\mathbf{v}_1), T_{\beta'}(\mathbf{v}_2), T_{\beta'}(\mathbf{v}_3), T_{\beta'}(\mathbf{v}_4))$ 的關係.
3. 考慮 linear transformations $T: V \rightarrow W$, $F: W \rightarrow U$.

(a) 證明 $R(F \circ T) \subseteq R(F)$ 且 $N(T) \subseteq N(F \circ T)$.

(b) 利用 dimension theorem, 即 $\text{rank}(F \circ T) = \dim(V) - \dim(N(F \circ T))$ 及 (a), 證明

$$\text{rank}(F \circ T) \leq \text{rank}(T).$$

(c) 假設 W' 為 W 的 subspace, 考慮 $F': W' \rightarrow U$ 為將 F 的定義域限制在 W' 的 linear transformation (即 $F'(\mathbf{w}) = F(\mathbf{w})$, $\forall \mathbf{w} \in W'$). 證明 $F'(W') = F(W')$ 且 $N(F') = N(F) \cap W'$, 並以此證明

$$\dim(N(F)) \geq \dim(W') - \dim(F(W')).$$

(d) 考慮 (c) 中 $W' = T(V)$ 的情況, 利用 $\text{rank}(F) = \dim(W) - \dim(N(F))$ 證明

$$\text{rank}(F) \leq \dim(W) - \text{rank}(T) + \text{rank}(F \circ T).$$

(e) 結合 (a), (b), (d) 說明

$$\text{rank}(F) + \text{rank}(T) - \dim(W) \leq \text{rank}(F \circ T) \leq \min\{\text{rank}(T), \text{rank}(F)\}.$$