Linear Algebra (II) Exercise (Week 7)
April 02, 2025

1. 考慮 linear transformation $T : P_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$ 定義為 $T(a+bx+cx^2) = \begin{bmatrix} b+c & a \\ b & c \end{bmatrix}$.

   (a) 試求 ${}_{\varepsilon'}[T]_{\varepsilon}$, 其中 $\varepsilon, \varepsilon'$ 分別為 $P_2(\mathbb{R}), M_2(\mathbb{R})$ 的 standard ordered basis
   $$\varepsilon = (1, x, x^2), \varepsilon' = (\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}).$$

   (b) 試求 ${}_{\gamma}[T]_{\beta}$, 其中 β, γ 分別為 $P_2(\mathbb{R}), M_2(\mathbb{R})$ 的 ordered basis
   $$\beta = (1, x, 1+x^2), \gamma = (\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}).$$

   (c) 試分別利用 (a), (b) 的表現矩陣求 $N(T)$ 和 $R(T)$ 的一組 basis.

2. 考慮 linear transformation $T : V \to W$.

   (a) 假設 T 為 isomorphism. 證明存在 V, W 的 ordered basis β, γ 使得 ${}_{\gamma}[T]_{\beta}$ 為 identity matrix.

   (b) 假設 $\dim(V) = m$, $\dim(W) = n$ 且 $\mathrm{rank}(T) = k$. 證明存在 V, W 的 ordered basis β, γ 使得 ${}_{\gamma}[T]_{\beta} = (a_{ij})$ 為 $n \times m$ matrix 其中 $a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{if } i = j \text{ 且 } 1 \le i \le k; \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$

3. 考慮 linear transformation $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ 定義為 $T(x, y, z) = (y, -x, z)$. 令 A 為 T 的 standard matrix representation.

   (a) 令 β 為 $\mathbb{R}^3$ 的 ordered basis $(1, -1, 1), (1, -2, 2), (1, -2, 1)$ 且令 B 為 T 的 matrix representation related to β. 試求 B，並寫出矩陣 P 使得 $A = P^{-1}BP$.

   (b) 令 $Q = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$. 試寫出 $\mathbb{R}^3$ 的 ordered basis γ, 使得 T 的 matrix representation related to γ 是 $Q^{-1}AQ$.