Linear Algebra (II) Exercise (Week 8)
April 11, 2025

1. 假設 A,B 為 similar 的 n 階方陣.
   (a) 證明 A^{t}, B^{t} 也是 similar.
   (b) 證明若 A 為 invertible, 則 B 亦為 invertible. 並證明此時對任意 $k\in\mathbb{N}$, A^{-k} 和 B^{-k} 為 similar.

2. 考慮 linear operator $T:V\to V$, 且 $\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2$ 為 T 的 eigenvectors 其對應的 eigenvalues 分別為 λ_1,λ_2. 已知 $\lambda_1\neq\lambda_2$.
   (a) 證明 $\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2$ 為 linearly independent.
   (b) 證明若 $c_1,c_2\in\mathbb{F}$ 且 $c_1\neq 0, c_2\neq 0$, 則 $c_1\mathbf{v}_1+c_2\mathbf{v}_2$ 不會是 T 的 eigenvector.
   (c) 證明若存在 $c_1,c_2\in\mathbb{F}$ 且 $c_1\neq 0, c_2\neq 0$ 使得 $c_1\mathbf{v}_1+c_2\mathbf{v}_2$ 為 T^2 的 eigenvector, 則 $\lambda_1=-\lambda_2$. 並說明對於 T^2 此 eigenvector $c_1\mathbf{v}_1+c_2\mathbf{v}_2$ 的 eigenvalue 為何.

3. 考慮 $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ 定義為 $T(x,y,z)=(x+2y+z,y,x+3y+z)$. 令 $\mathbf{v}_1=(-1,0,1),\mathbf{v}_2=(3,-1,2),\mathbf{v}_3=(1,0,1)$.
   (a) 說明 $\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_3$ 皆為 T 的 eigenvector 並決定其對應的 eigenvalue.
   (b) 令 $\mathbf{v}=(1,-1,2)$, 將 $\mathbf{v}$ 寫成 $\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_3$ 的線性組合, 並求 $T^3(\mathbf{v})$.
   (c) 考慮 ordered basis $\beta=(\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_3)$ 以及 standard ordered basis ε. 試寫下表現矩陣 $[T]_\varepsilon$ 以及 $[T]_\beta$.
   (d) 試寫下將 $[T]_\varepsilon$ 對角化成 $[T]_\beta$ 之間的關係式, 即找出互為 inverse 的矩陣 P,Q 使得 $Q[T]_\varepsilon P=[T]_\beta$. 並驗證之.

4. 考慮 $A=\begin{bmatrix}2&0&1\\0&1&2\\0&0&1\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}1&-6&4\\-2&-4&5\\-2&-6&7\end{bmatrix}$.
   (a) 試分別求 A,B 的 characteristic polynomial.
   (b) 試分別說明 A,B 的 eigenvalues 有哪些, 並計算每個 eigenvalue 的 algebraic multiplicity 和 geometric multiplicity.