Linear Algebra (II) Exercise (Week 8)

April 18, 2025

1. 假設 $T: V \to V$ 為 linear operator，考慮多項式 $f(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$。假設 $\mathbf{v} \in V$ 為 T 的一個 eigenvalue 為 λ 的 eigenvector. 證明 $\mathbf{v}$ 為 $f(T)$ 的 eigenvector, 並說明其對應的 eigenvalue 為何.

2. 考慮 linear map $T: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$, 定義為 $T(x,y,z,w) = (x+y+2z-w, y+w, 2z-w, z+w)$. 令 $W = \{(x,y,0,0) : x,y \in \mathbb{R}\}$, $U = \mathrm{Span}((1,1,0,1),(2,1,1,2),(1,-1,2,1))$.
   (a) 證明 W 和 U 皆為 $\mathbb{R}^4$ 中的 T-invariant subspace.
   (b) 分別找出 W, U 中的 ordered basis $\beta = (\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2)$, $\gamma = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)$。分別寫下 $T|_W$ 以 β 所得的表現矩陣，以及 $T|_U$ 以 γ 所得的表現矩陣.
   (c) 說明 $\alpha = (\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)$ 可形成 $\mathbb{R}^4$ 的一組 ordered basis, 並寫下 T 以 α 所得的表現矩陣. 計算 $T|_W$, $T|_U$ 以及 T 的 characteristic polynomials. 並說明它們之間關係。
   (d) 分別找出 $T|_W$, $T|_U$ 以及 T 的 eigenvalues，並說明它們的代數重根數與幾何重根數。

3. 考慮 $T_1: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ 定義為 $T_1(a,b,c,d) = (a+b, b-c, a+c, a+d)$. 令 W_1 為 $(1,0,0,0)$ 所產生的 T_1-cyclic space.
   (a) 試求 W_1 的一組 ordered basis.
   (b) 試求 T_1 限制在 W_1 的 characteristic polynomial.

4. 考慮 $T_2: M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$ 定義為 $T_2(A) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} A$. 令 W_2 為 $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ 所產生的 T_2-cyclic space.
   (a) 試求 W_2 的一組 ordered basis.
   (b) 試求 T_2 限制在 W_2 的 characteristic polynomial.

5. 考慮矩陣 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$.
   (a) 試找到可逆矩陣 U 以及對角矩陣 D 使得 $A = UDU^{-1}$.
   (b) 利用 $A = UDU^{-1}$ 計算 A^4.
   (c) 利用 Cayley-Hamilton Theorem 計算 A^4.
   (d) 利用 $A = UDU^{-1}$ 求 A^{-1}.
   (e) 利用 Cayley-Hamilton Theorem 將 A^{-1} 寫成 A^2, A, I_3 的線性組合, 並以此寫出 A^{-1}.