

## Linear Algebra (II) Exercise (Week 10)

April 25, 2025

1. 以下矩陣試說明那些矩陣可以在實數對角化, 那些不可以. 若矩陣  $A$  可對角化, 請找到可逆矩陣  $U$  以及對角矩陣  $D$  使得  $U^{-1}AU = D$ .

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} -3 & 1 & -1 \\ -7 & 5 & -1 \\ -6 & 6 & -2 \end{bmatrix}.$$

2. 假設  $A, B$  皆為  $n$  階方陣.

- (a) 證明若  $A, B$  皆為 diagonalizable 且  $A, B$  有相同的 characteristic polynomial, 則  $A$  和  $B$  為 similar.
- (b) 考慮  $n = 3$  的情況, 試找到矩陣  $A, B$  其 characteristic polynomial 皆為  $-x^3$  但  $A$  和  $B$  不是 similar.

3. 已知  $A$  為  $n \times n$  diagonalizable matrix.

- (a) 證明  $A^t$  為 diagonalizable (參見講義 Question 8.1, 8.2)。說明你是用可對角化的等價關係中的哪一個證明的。
- (b) 考慮  $n = 2$  的情形, 假設向量  $(a, b), (c, d)$  為  $A$  的兩個 linearly independent 的 eigenvectors 且其對應的 eigenvalues 分別為  $\lambda_1, \lambda_2$ , 試找出  $A^t$  的兩個 linearly independent 的 eigenvectors 及其對應的 eigenvalues。
- (c) 假設  $A$  為 invertible, 證明  $A^{-1}$  為 diagonalizable。說明你是用可對角化的等價關係中的哪一個證明的。
- (d) 假設  $A$  為 invertible, 考慮  $n = 2$  的情形。假設向量  $(a, b), (c, d)$  為  $A$  的兩個 linearly independent 的 eigenvectors 且其對應的 eigenvalues 分別為  $\lambda_1, \lambda_2$ , 試找出  $A^{-1}$  的兩個 linearly independent 的 eigenvectors 及其對應的 eigenvalues。

4. 考慮  $n \in \mathbb{N}$  且  $n > 1$ , 以及  $\mathbb{R}^n$  中的 nonzero vector  $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$  且令  $c = a_1 + \cdots + a_n$ .

考慮  $n \times n$  matrix  $A$ , 其中  $A$  的每個 column 皆為  $\mathbf{v}$ . 我們要探討  $A$  是否可對角化。

- (a) 利用 dimension 定理求  $A$  的 nullity. 說明 0 為何會是  $A$  的 eigenvalue 以及 0 的 geometric multiplicity.
- (b) 請問 eigenvalue 0 其 algebraic multiplicity 與 geometric multiplicity 之間的關係, 並以此說明  $x^{n-1}$  必整除  $A$  的 characteristic polynomial.
- (c) 利用 trace 與 characteristic polynomial 的關係說明  $A$  的 characteristic polynomial 為  $(-1)^n(x^n - cx^{n-1})$ .
- (d) 說明  $A$  可以對角化若且唯若  $c \neq 0$ .
- (e) 利用對任意  $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$  皆有  $A\mathbf{w} \in \text{Col}(A)$ , 說明  $\mathbf{v}$  一定是  $A$  的一個 eigenvector, 並求其 eigenvalue.
- (f) 若  $c \neq 0$  試寫下可逆矩陣  $P$  以及對角矩陣  $D$  使得  $P^{-1}AP = D$ 。(注意: 你需具體找到  $N(A)$  的一組 basis.)