**Linear Algebra (II) Exercise (Week 11)**

May 02, 2025

1. 對以下的矩陣試找到將其對角化的 orthogonal matrix 並找到其對應的對角矩陣.

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

2. 給定 $A \in M_n(\mathbb{R})$.
   (a) 說明 $A^tA$ is orthogonal diagonal diagonalizable 且其 eigenvalues 皆大於等於 0. (Hint: 利用矩陣乘法與內積的關係)
   (b) 假設 $A$ 為 symmetric, 證明若對任意 $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ 皆有 $\langle A\mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle = 0$, 則 $A$ 為零矩陣.
   (c) 試找到一個 2 階方陣 $A$ 滿足 $\langle A\mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle = 0, \forall \mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$ 但 $A$ 不是零矩陣.

3. 假設 $W$ 為 $\mathbb{R}^n$ 的 subspace 且 $0 < \dim W = k < n$. 令 $A \in M_n(\mathbb{R})$ 為 $\mathbb{R}^n$ 中的向量對 $W$ 的投影矩陣 (orthogonal projection matrix).
   (a) 證明 $A$ 的 eigenvalue 為 $0, 1$ 且滿足 $A^2 = A$.
   (b) 證明 $A$ 為 symmetric matrix.

4. 假設 $A \in M_n(\mathbb{R})$ 為 symmetric matrix 且滿足 $A^2 = A$.
   (a) 證明 $0, 1$ 是 $A$ 唯一可能的 eigenvalue.
   (b) 證明若對 $A$ 來說 1 的 algebraic multiplicity 為 $k$, 則存在 $W$ 為 $\mathbb{R}^n$ 的 subspace 且 $\dim W = k$ 使得 $A$ 為 $\mathbb{R}^n$ 中的向量對 $W$ 的投影矩陣.

5. 試利用 Spectral Theorem (即對稱矩陣皆可正交對角化) 回答以下問題。
   (a) 給定 $k \in \mathbb{R}$ 試找到所有的實對稱矩陣 $A$ 滿足 $\det A = k$ 且 $A\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$.
   (b) 假設 $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ 以標準基底寫下的矩陣為實對稱矩陣. 已知 $2, 5$ 為 $T$ 的 eigenvalues 且 $(1, 1, -1), (1, -1, 0)$ 為 $T$ 的兩個 eigenvalue 為 5 的 eigenvector. 試求 $T(1, 1, 2)$.
   (c) 找到對稱實矩陣 $A$ 滿足僅有兩個 eigenvalues $1, 2$. 且 2 的 eigenspace 為 $\mathrm{Span}((1, 1, 1))$.