

Linear Algebra (II) Exercise (Week 12)

May 09, 2025

1. 將以下的二元二次方程式經由坐標變換寫成標準式. 需寫下坐標如何變換. 並以新的坐標說明它們為何種二次曲線。以原來的坐標說明其圖形之重要參數（橢圓：頂點、長、短軸；雙曲線：頂點、貫軸、漸近線；拋物線：頂點、對稱軸）。
 - (a) $3x^2 - 2xy + 3y^2 = 4$.
 - (b) $16x^2 + 24xy + 9y^2 - 3x + 4y = 5$.
 - (c) $7x^2 + 12xy - 2y^2 - 2x + 4y = 6$.
2. 設 $a, b \in \mathbb{R}$ 考慮二元二次方程式 $7x^2 + 12xy - 2y^2 - 2ax + 4ay = b$ 的圖形。
 - (a) 請說明當 $a = 1$ 時, b 為多少時圖形會是退化的情形？在非退化情形, b 改變時漸近線, 貫軸, 對稱軸方程式是否改變？中心、焦點、頂點坐標是否改變？
 - (b) 固定 $b \in \mathbb{R}$, 請說明當 a 為多少時圖形會是退化的情形？在非退化情形, a 改變時焦距、貫軸長是否改變？中心、焦點、頂點坐標是否改變？漸近線, 貫軸, 對稱軸的斜率是否改變？
3. 設 $c, d \in \mathbb{R}$ 考慮二元二次方程式 $16x^2 + 24xy + 9y^2 + cx + 4y = d$ 的圖形。
 - (a) 試找到所有可能的 c 使得方程式的圖形為拋物線。
 - (b) 試求 c 使得圖形為退化情形, 並說明此時 d 為多少時會使得圖形分別為兩平行直線、一直線和空集合。