Linear Algebra (II) Exercise (Week 13)

May 16, 2025

1. 將以下的三元二次方程式經由坐標變換寫成標準式 (中心在原點). 需寫下坐標如何變換.

   (a) $3x^2+2xy+2xz+4yz=4$.

   (b) $2x^2+2xy+2xz+2yz-x+y+z=1$.

   (c) $3x^2+2xz-y^2+3z^2+2y=0$.

2. 套用上題的結果，寫下以下的三元二次方程式的圖形之相關參數。

   (a) $3x^2+2xy+2xz+4yz=4$. 說明此曲面之名稱。求中心軸的參數式，以及一組平面方程式使得圖形與平面之截痕為橢圓。

   (b) $2x^2+2xy+2xz+2yz-x+y+z=1$. 說明此曲面之名稱。求鞍點坐標、以及平面方程式使得圖形與平面之截痕為兩直線。

   (c) $3x^2+2xz-y^2+3z^2+2y=0$. 說明此曲面之名稱。求 2 個頂點之坐標，以及過頂點的切平面方程式。

3. 閱讀講義 “Second Derivative Test”。

4. 給定 $r\in\mathbb{R}$. 考慮數列 $a_0,a_1,a_2,\ldots$，其中 $a_0=0, a_1=1$ 以及

$$a_k=ra_{k-1}+(1-r)a_{k-2}, \text{ for } k\geq 2.$$

   (a) 找到二階方陣 B 使得 $\begin{bmatrix} a_k \\ a_{k-1} \end{bmatrix}=B\begin{bmatrix} a_{k-1} \\ a_{k-2} \end{bmatrix}$. 並將 (a_1,a_0) 寫成 B 的兩個 eigenvectors 的線性組合。.

   (b) 假設 $0<|r-1|<1$。試說明數列 $a_0,a_1,a_2,\ldots$ 為 *neutrally stable* (意指不存在 $N\in\mathbb{N}$ 使得 $a_m=a_N, \forall m>N$, 但 $\lim_{k\to\infty}a_k$ 存在)，並求其極限。

5. 考慮函數 $S:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ 定義為 $S(a_1,\ldots,a_n)=\sum_{i=1}^n a_i$. 對 $A\in M_n(\mathbb{R})$ 令 $T_A:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$, 定義為 $T_A(\mathbf{v})=A\mathbf{v}$. 令 ε,ε' 分別為 $\mathbb{R}^n$ 和 $\mathbb{R}$ 的 standard ordered basis.

   (a) 試證明 S 為 linear map 且寫下 S 對 ε,ε' 的表現矩陣 $[S]_{\varepsilon}^{\varepsilon'}$.

   (b) 考慮合成函數 $S\circ T_A:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$. 試說明 $[S\circ T_A]_{\varepsilon}^{\varepsilon'}$ 為何。

   (c) 假設 A 的每個 entry 皆為非負實數。證明 A 為 stochastic matrix 若且唯若 $S\circ T_A=S$.

   (d) 假設 A 為 stochastic matrix 且 $B\in M_n(\mathbb{R})$ 的每個 entry 皆為非負實數。利用函數合成的結合律 (即 $S\circ(T_A\circ T_B)=(S\circ T_A)\circ T_B$) 以及函數合成與矩陣乘法的關係證明 B 為 stochastic matrix 若且唯若 AB 為 stochastic matrix.

   (e) 試找到 $A,B\in M_2(\mathbb{R})$ 其中 A 和 BA 為 stochastic matrix 但是 B 並不是 stochastic matrix.