

Linear Algebra II.
Final Exam
June 07, 2024

1. (2 分) 請依照程序，按部就班（但請略去不必要程序）說明以下矩陣是否可對角化成實對角矩陣。

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad A_2 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad A_4 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

2. 已知 2 階方陣 A 的轉置矩陣 A^t 的 eigenvalues 為 $-1, 2$ 且其對應的 eigenvectors 分別為 $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ 。

- (a) (1 分) 請寫下可逆矩陣 P 以及對角矩陣 D 使得 $P^{-1}A^tP = D$ 。
- (b) (3 分) 請寫下 A 的 characteristic polynomial 以及其 eigenvalues 和對應的 eigenvectors。
- (c) (3 分) 說明 A 為可逆，並寫下 A^{-1} 的 characteristic polynomial 以及其 eigenvalues 和對應的 eigenvectors。
- (d) (2 分) 請寫下矩陣 A^3 （請乘開）。

3. 已知 A 為 3 階“對稱矩陣”，且有 eigenvalue 為 0 的 eigenvector $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ 。又知 -1 也是 A 的 eigenvalue。考慮以下三個向量

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

已知其中有兩個向量也是 A 的 eigenvectors。請回答以下問題（務必說明何時用到對稱的假設）。

- (a) (1 分) 請說明這兩個 eigenvectors 所對應的 eigenvalue 不可能都是 0。
- (b) (1 分) 請說明這兩個 eigenvectors 所對應的 eigenvalue 不可能都是 -1 。
- (c) (2 分) 請說明 $\mathbf{v}_3$ 一定不是 eigenvector。（hint: 用反證法，先說其不可能對應到非 0 的 eigenvalue，再說不可能 eigenvalue 為 0）
- (d) (2 分) 請說明 A 不可能有 $0, -1$ 以外的 eigenvalue 並說明 $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ 分別為 eigenvalue 為 $0, -1$ 的 eigenvector。
- (e) (2 分) 試找到以 A 的 eigenvectors 所形成的一組 $\mathbb{R}^3$ 的 orthonormal basis，並依此寫下矩陣 A （請乘開）。

4. 設 $c, d \in \mathbb{R}$, 考慮二元二次方程式 $16x^2 + 24xy + 9y^2 + cx + 4y = d$.
- (a) (3 分) 考慮 $c = -3, d = 5$ 的情形。利用坐標變換將方程式寫成標準式 (頂點在新坐標的原點)。並求曲線在原坐標的頂點以及對稱軸的方程式。
 - (b) (1 分) 試找到所有可能的 c 使得方程式的圖形為拋物線。
 - (c) (3 分) 試求 c 使得圖形為退化情形, 並說明此時 d 為多少時會使得圖形分別為兩平行直線、一直線和空集合。

5. 考慮 stochastic matrix $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0.5 \\ 0 & 0 & 0.5 \end{bmatrix}$

- (a) (1 分) 利用 B 的 eigenvalues 說明為何 B 不是 regular.
- (b) (1 分) 說明為何 $\lim_{k \rightarrow \infty} B^k$ 不存在.
- (c) (3 分) 試說明 $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 0.5 - 2c \\ 0.5 - c \\ 3c \end{bmatrix}$, 其中 $0 < c < 0.25$ 是有可能使得 $\lim_{k \rightarrow \infty} (B^k \mathbf{v})$ 存在的 probability vector, 並求其極限.

6. 假設 $A = \begin{bmatrix} 1-r & s \\ r & 1-s \end{bmatrix}$ 為 2×2 stochastic matrix.

- (a) (2 分) 假設 A 僅有一個 eigenvalue。說明 A 的 characteristic polynomial 為何, 並證明 $A = I_2$ 。(Hint: 利用 trace 和特徵多項式的關係)
 - (b) (1 分) 假設 A 有一個 eigenvalue 為 -1 , 證明 $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ 。
 - (c) (1 分) 證明 A 一定可以對角化。
 - (d) (2 分) 說明當 A 不是 (a), (b) 的那兩種矩陣時, $\lim_{k \rightarrow \infty} A^k$ 存在, 並寫下其極限 (用 r, s 表示)。
7. (1 分) 假設方陣 B 其每個 entry 皆為非負實數, 且每一個 row 其 entries 之和皆小於等於實數 r 。證明若 λ 為 B 的 eigenvalue, 則 $|\lambda| \leq r$.
8. (2 分) 假設 W_1, W_2 為 $\mathbb{R}^n$ 中兩個非零子空間, 滿足

$$W_1 \cap W_2 = \{\mathbf{0}\} \text{ 且 } \dim(W_1) + \dim(W_2) = n.$$

證明存在唯一的 n 階方陣 A 滿足 W_1, W_2 分別為 A 的 eigenvalue 1 和 2 的 eigenspace。