Exercise (Week 3)
September 22, 2023

1. 假設 $A=[a_{ij}]\in M_{3\times 4}$, $B=[b_{ij}]\in M_{4\times 3}$ 其中 $a_{ij}=i+j$, $b_{ij}=i\cdot j$.
   (a) 試利用 A 的 2nd row 計算 AB 的 2nd row.
   (b) 試完整寫下矩陣 A^{t} 和 B^{t}.
   (c) 前次習題曾計算 AB 的 3rd column. 請說明可以用 $(AB)^{\mathrm{t}}$ 哪個 row 或是 column 來求 AB 的 3rd column（只看每個 entry 是否一致，不分寫成 row vector 或 column vector）. 並利用 A^{t}, B^{t} 的乘法 (注意順序) 求出。

2. 設 $\mathbf{a},\mathbf{b}$ 為 $\mathbb{R}^n$ 上的向量, 若將 $\mathbf{a}$ 寫成 row vector 的形式, $\mathbf{b}$ 寫成 column vector 的形式, 且將 $\mathbf{a},\mathbf{b}$ 看成矩陣, 即 $\mathbf{a}\in M_{1\times n}(\mathbb{R})$, $\mathbf{b}\in M_{n\times 1}(\mathbb{R})$. 試問依矩陣乘法定義 $\mathbf{ba}$ 應為何種矩陣? 它和 $\mathbf{a},\mathbf{b}$ 看成 $\mathbb{R}^n$ 上的向量後取內積 $\langle \mathbf{b},\mathbf{a}\rangle$ 有關嗎?

3. 假設 $A=[a_{ij}]\in M_{m\times n}, B=[b_{ij}]\in M_{n\times k}$ 且令 $AB=[c_{ij}]$. 令 $\mathbf{b}_k,\mathbf{c}_k$ 分別表示 B 和 AB 的 kth column. 已知 $\mathbf{b}_4=r\mathbf{b}_1+s\mathbf{b}_2+t\mathbf{b}_3$ 其中 $r,s,t\in\mathbb{R}$. 證明 $\mathbf{c}_4=r\mathbf{c}_1+s\mathbf{c}_2+t\mathbf{c}_3$.

4. 假設 A,B 皆為 n 階的 diagonal matrix 且設 A,B 的 (i,i)-th entry 分別為 a_i,b_i.
   (a) 試證明 AB 也是 diagonal matrix 且寫下 AB 的 (i,i)-th entry. 並依此說明 A 和 B 是否為 commutative (即是否乘法可交換 $AB=BA$)?
   (b) 試利用數學歸納法證明對任意 $k,m\in\mathbb{N}$, A^kB^m 亦為 diagonal matrix.
   (c) 給定一實係數多項式 $f(x)=c_mx^m+\cdots+c_1x+c_0\in\mathbb{R}[x]$. 對任意 n 階方陣 M, 定義 $f(M)$ 為 n 階方陣 $c_mM^m+\cdots+c_1M+c_0I_n$, 其中 I_n 為 n 階單位矩陣. 證明 $f(A)$ 亦為 diagonal matrix 並說明其 (i,i)-tn entry 為何。

5. 假設 A,B,C 皆為 n 階的 square matrices. 已知 A 和 C 為 commutative 且 B 和 C 為 commutative.
   (a) 證明 $A+B$ 和 C 為 commutative.
   (b) 試利用數學歸納法證明對任意 $k,m\in\mathbb{N}$, A^k 和 C^m 為 commutative.
   (c) 假設 $f(x),g(x)\in\mathbb{R}[x]$. 證明矩陣 $f(A)$ 和 $g(C)$ 亦為 commutative.

6. 考慮矩陣 $A=\begin{bmatrix}1&1&2&1\\0&-2&0&0\\1&2&1&-2\\0&3&2&1\end{bmatrix}$.
   (a) 利用一些 elementary row operations 將 A 化成 reduced echelon form. 寫下每個 elementary row operation 所對應的 elementary matrix.
   (b) 寫下 A^{-1} 並將 A^{-1} 寫成一些 elementary matrix 的乘積（不必乘開驗證）。
   (c) 利用 (b) 的結果將 A 寫成一些 elementary matrix 的乘積（不必乘開驗證）。