

Exercise (Week 4)

September 27, 2023

1. 固定一正整數 m , 考慮所有 $m \times 3$ matrices.

- 試找到一個 3×3 matrix E_1 使得對任意 $A \in M_{m \times 3}$, 皆有 AE_1 的 1-st column 就是 A 的 1-st column, 而 AE_1 的 2-nd column 恰為 A 的 3-rd column 且 AE_1 的 3-rd column 恰為 A 的 2-nd column.
- 試找到一個 3×3 matrix E_2 使得對任意 $A \in M_{m \times 3}$, 皆有 AE_2 的 1-st column 就是 A 的 1-st column, 而 AE_2 的 2-nd column 也是 A 的 2-nd column 且 AE_2 的 3-rd column 恰為 A 的 3-rd column 的 4 倍.
- 試找到一個 3×3 matrix E_3 使得對任意 $A \in M_{m \times 3}$, 皆有 AE_3 的 1-st column 就是 A 的 1-st column 減去 A 的 3-rd column, 而 AE_3 的 2-nd column 恰為 A 的 2-nd column 且 AE_3 的 3-rd column 恰為 A 的 3-rd column.

2. 固定一正整數 n , 本題只考慮 n 階方陣。

- 假設 A 和 B 皆為 symmetric matrices. 證明 AB 為 symmetric matrix 若且唯若 A, B 為 commutative (乘法可交換)。
- 試說明 elementary matrix 的 transpose 亦為 elementary matrix (需說明原來對應的 elementary row operation 轉置後其所對應的 elementary row operation 為何)。並說明哪些 type 的 elementary matrix 是 symmetric.
- 這些 symmetric elementary matrices 中哪些相乘後仍為 symmetric? 並利用 (a) 小題的結果說明這些 symmetric elementary matrices 哪些是 commutative.

3. 令 $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}, M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ 且令 A' 為 A 的 reduced echelon form.

- 試求 $\text{rank}(A)$ 並說明對任意 $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^k$ 聯立方程組 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 皆在 $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^\ell$ 有解, 其中 k, ℓ 為何?
- 對任意聯立方程組 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 皆會和 $A'\mathbf{x} = \mathbf{b}'$ 為 equivalent。試找到一個矩陣 E 使得 $E\mathbf{b} = \mathbf{b}'$.
- 試找到無窮多個 C 滿足 $AC = I_4$. 並說明這些 C 皆滿足 $A'C = E$, 其中 E 為 (b) 小題的 E , 並依此說明 (b) 小題的 E 是唯一的。
- 試利用對 A' 做 elementary column operations 的方式, 找到 5×5 matrix E' 使得 $EAE' = M$ 。

4. 給定一 $m \times n$ matrix A , 其中 $m \neq n$. 假設 B 為 $n \times m$ matrix 滿足 $AB = I_m$.

- 說明 $m < n$, 並依此說明對任意 $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$, 聯立方程組 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 皆存在無窮多組解。
- 試說明對任意 $k \in \mathbb{N}$, 皆存在無窮多 $n \times k$ 的矩陣 C 使得 AC 為 $m \times k$ 的零矩陣。
- 試說明對任意 $k \in \mathbb{N}$ 僅有一個 $k \times m$ 的矩陣 D 使得 DA 為 $k \times n$ 的零矩陣。