Exercise (Week 5)

October 06, 2023

1. 考慮聯立方程組 $\left\{\begin{array}{ccccccc} x & & & + & z & = & 1 \\ x & + & y & & & = & 2 \\ 3x & + & y & + & z & = & 1 \\ & & y & + & z & = & 2 \end{array}\right.$，令 A 為其係數矩陣且令 $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$.

   (a) 求 $\operatorname{rank}(A)$ 並利用 rank 說明此聯立方程組若有解其解唯一（請勿直接解此方程組）。

   (b) 請利用 elementary row operations 找到兩個相異矩陣 E_1, E_2 使得 E_1A, E_2A 皆為 A 的 reduced echelon form。

   (c) 請利用 (b) 所得的 E_1, E_2 找出兩個相異矩陣 D_1, D_2 使得 $D_1A = D_2A = I_3$.

   (d) 請利用 (c) 所得的 D_1, D_2 說明方程組 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 若有解其解應為何？是 $D_1\mathbf{b}$ 或是 $D_2\mathbf{b}$？此結果是否與 (a) 的唯一性相違背？

   (e) 將 (d) 所得的可能解代回聯立方程組說明此聯立方程組是否有解。

2. 假設 A 為 $m \times n$ matrix 且 B 為 $n \times m$ matrix 滿足 $AB = I_m$. 前面的習題已知當 $m \neq n$ 時會存在無窮多個矩陣 M 使得 $AM = I_m$ 但不存在矩陣 N 使得 $NA = I_n$。又存在非零矩陣 C 使得 AC 為零矩陣但不存在非零矩陣 D 使得 DA 為零矩陣。請分別依 $m \neq n$; $m = n$ 兩種情況回答以下問題並說明原因。

   (a) 是否存在矩陣使得 $BM = I_n$？

   (b) 是否存在無窮多個矩陣使得 $NB = I_m$？

   (c) 是否存在非零矩陣 C 使得 BC 為零矩陣？

   (d) 是否存在非零矩陣 D 使得 DB 為零矩陣？

3. 假設 A 為 n 階 square matrix 且 $A^2 = O$，其中 O 為 n 階零方陣。證明 A 為 non-invertible 但 $I_n - A$ 為 invertible (Hint 利用 $I_n - A^2 = (I_n - A)(I_n + A)$)。請推廣到一般 $A^k = O$ 的情況。

4. 假設 AB 為 invertible, 其中 A 為 $m \times n$ matrix, B 為 $n \times m$ matrix.

   (a) 試證明 $\operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}(B) = m$。

   (b) 證明當 $m \neq n$ 時 BA 不是 invertible。

5. 課堂上我們利用 constructive 的方法證明了若 A, B 為 invertible，則 AB 亦為 invertible。也就是說我們直接建構出 AB 的反矩陣 $B^{-1}A^{-1}$。請依照這樣的想法處理以下問題。

   (a) 假設 A, B 為方陣且 AB 為 invertible。請用 constructive 的方式找到 A, B 的反矩陣（也因此證明了 A, B 皆為 invertible）。注意：所找的反矩陣，必需用已知的矩陣表達，也就是僅能用 $A, B, AB, (AB)^{-1}$ 表達（不能用 A^{-1}, B^{-1}）。另外要注意，論述中一定要用到 A, B 是方陣的假設（因為若不是方陣，結論是錯的）。

(b) 假設 A 為 $m\times n$ matrix, B 為 $n\times m$ matrix 滿足 $AB-I_m$ 為 invertible，我們想用 constructive 的方法證明 $BA-I_n$ 也是 invertible。為了方便起見我們用 C 表示 $AB-I_m$ 的反矩陣 $(AB-I_m)^{-1}$，也就是說，我們要用已知的矩陣例如 A,B,C,I_n 來表示 $BA-I_n$ 的反矩陣。

   i. 利用矩陣乘法結合律以及分配律，找到一個矩陣 D 滿足 $B(AB-I_m)=(BA-D)B$。

   ii. 利用 C 為 $AB-I_n$ 的反矩陣以及上一題找到的 D 證明 $BA=(BA-I_n)BCA$，因此得到 $BA-I_n=(BA-I_n)BCA-I_n$。

   iii. 將上式移項並利用分配律，具體寫下 $BA-I_n$ 的反矩陣。說明此論述是否需要 A,B 為方陣（即 $m=n$）的要求。

6. 用 constructive 的方式證明存在性，有時是很困難的（例如上一題的 (b)）。我們也可考慮用 nonconstructive 的方式（即純粹用理論）處理存在性。請依照這樣的想法處理以下問題。

   (a) 假設 A 為 n 階方陣。證明 A 為 invertible 若且唯若當 $\mathbf{v}\in\mathbb{R}^n$ 滿足 $A\mathbf{v}=\mathbf{0}$，則 $\mathbf{v}=\mathbf{0}$。

   (b) 假設 A 為 n 階方陣。證明 A 為 invertible 若且唯若對任意 $\mathbf{v}\in\mathbb{R}^n$ 皆存在 $\mathbf{w}\in\mathbb{R}^n$ 使得 $A\mathbf{w}=\mathbf{v}$。

   (c) 已知 A,B 為 n 階 invertible matrices。假設 $\mathbf{v}\in\mathbb{R}^n$ 滿足 $(AB)\mathbf{v}=\mathbf{0}$，利用已知"若 $\mathbf{u},\mathbf{w}\in\mathbb{R}^n$ 滿足 $A\mathbf{u}=\mathbf{0}$, $B\mathbf{w}=\mathbf{0}$，則 $\mathbf{u}=\mathbf{0}$, $\mathbf{w}=\mathbf{0}$"證明 $\mathbf{v}=\mathbf{0}$（因此證明了 AB 為 invertible）。

   (d) 已知 AB 為 n 階 invertible matrix。假設 $\mathbf{v}\in\mathbb{R}^n$ 滿足 $B\mathbf{v}=\mathbf{0}$，利用已知"若 $\mathbf{u}\in\mathbb{R}^n$ 滿足 $(AB)\mathbf{u}=\mathbf{0}$, 則 $\mathbf{u}=\mathbf{0}$"證明 $\mathbf{v}=\mathbf{0}$（因此證明了 B 為 invertible）。

   (e) 已知 AB 為 n 階 invertible matrices。任取 $\mathbf{v}\in\mathbb{R}^n$，利用已知"任取 $\mathbf{v}\in\mathbb{R}^n$ 皆存在 $\mathbf{u}\in\mathbb{R}^n$ 使得 $(AB)\mathbf{u}=\mathbf{v}$"證明存在 $\mathbf{w}\in\mathbb{R}^n$ 使得 $A\mathbf{w}=\mathbf{v}$（因此證明了 A 為 invertible）。

   (f) 假設 A 為 $m\times n$ matrix, B 為 $n\times m$ matrix。已知 $AB-I_m$ 為 invertible。假設 $\mathbf{v}\in\mathbb{R}^n$ 滿足 $(BA-I_n)\mathbf{v}=\mathbf{0}$，利用已知"若 $\mathbf{u}\in\mathbb{R}^m$ 滿足 $(AB-I_m)\mathbf{u}=\mathbf{0}$, 則 $\mathbf{u}=\mathbf{0}$"證明 $\mathbf{v}=\mathbf{0}$（因此證明了 $BA-I_n$ 為 invertible）。