

Exercise (Week 6)

October 13, 2023

1. 考慮集合 $S = \{1, 2\}$, 以及 vector space \mathbb{R}^3 (一般的加法與係數積). 令 $F(S, \mathbb{R}^3)$ 為所有 S 到 \mathbb{R}^3 的函數所成的集合. 對任意 $f, g \in F(S, \mathbb{R}^3)$, $r \in \mathbb{R}$ 定義

$$(f+g)(1) = f(1) + g(1), \quad (f+g)(2) = f(2) + g(2)$$

以及

$$(rf)(1) = r \cdot f(1), \quad (rf)(2) = r \cdot f(2)$$

已知 $F(S, \mathbb{R}^3)$ 在此定義之下是一個 over \mathbb{R} 的 vector space.

(a) 若 $h \in F(S, \mathbb{R}^3)$ 是此空間的零向量, 請寫下 $h(1), h(2)$.

(b) 若 $h_1 \in F(S, \mathbb{R}^3)$ 滿足

$$h_1(1) = (-1, 2, -1), \quad h_1(2) = (2, 0, 1)$$

試依定義檢查 $(-2)h_1 = -(2h_1)$.

(c) 承 (b) 若又考慮 $h_2 \in F(S, \mathbb{R}^3)$ 滿足

$$h_2(1) = (0, 1, 2), \quad h_2(2) = (1, 2, 3)$$

試寫下 $3h_2 - 2h_1$ 在 1, 2 的函數值.

2. 考慮集合 $U = \{(a, b) : a, b \in \mathbb{R}, a > 0 \text{ 且 } b > 0\}$. 定義 U 上的加法運算為:

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = (ac, bd), \quad \forall \mathbf{u} = (a, b), \mathbf{v} = (c, d) \in U.$$

另外對任意 $r \in \mathbb{R}$, $\mathbf{u} = (a, b) \in U$ 定義係數積 $r\mathbf{u} = (a^r, b^r)$. 試回答以下問題.

(a) U 是否為 vector space over \mathbb{R} ?

(b) 假設 $\mathbf{v} = (25, 1/9)$, $\mathbf{w} = (4, 1)$ 且 $\mathbf{u} = (x, y)$ 在 U 中滿足 $2\mathbf{u} + 3\mathbf{v} = 5\mathbf{w}$. 利用定義分別寫下 $2\mathbf{u} + 3\mathbf{v}$ 以及 $5\mathbf{w}$ 的坐標表示法, 並依此解出 x, y .

(c) 若給定 $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in U$ 已知 $\mathbf{u} \in U$ 滿足 $2\mathbf{u} + 3\mathbf{v} = 5\mathbf{w}$. 試將 \mathbf{u} 寫成 \mathbf{v}, \mathbf{w} 的線性組合。特別的, 當 $\mathbf{v} = (25, 1/9)$, $\mathbf{w} = (4, 1)$. 若 $\mathbf{u} \in U$ 滿足 $2\mathbf{u} + 3\mathbf{v} = 5\mathbf{w}$. 利用上述的線性組合, 解出 \mathbf{u} .