

Exercise (Week 7)

October 20, 2023

1. 考慮集合 $S = \{1, 2\}$, 以及 vector space $\mathbb{R}^3$. $F(S, \mathbb{R}^3)$ 為所有 S 到 $\mathbb{R}^3$ 的函數所成的 vector space (上週習題所定的運算方法)。下列哪些是 $F(S, \mathbb{R}^3)$ 的 subspace, 並說明理由。

$$F_1 = \{f \in F(S, \mathbb{R}^3) : f(2) = (0, 0, 0)\}; F_2 = \{f \in F(S, \mathbb{R}^3) : f(1) + f(2) = (0, 0, 0)\}$$

$$F_3 = \{f \in F(S, \mathbb{R}^3) : f(1) \cdot f(2) = 0\}; F_4 = \{f \in F(S, \mathbb{R}^3) : f(1) = (x, y, z), xyz = 0\}$$

$$F_5 = \{f \in F(S, \mathbb{R}^3) : f(2) = (x, y, z), x + 2y - z = 0\}.$$

2. 考慮集合 $U = \{(a, b) : a, b \in \mathbb{R}, a > 0 \text{ 且 } b > 0\}$ 所成的 vector space (上週習題所定的運算方法)。下列哪些是 U 的 subspace, 並說明理由。

$$U_1 = \{(x, 1) : x > 0\}; U_2 = \{(2^r, 3^r) : r \in \mathbb{R}\};$$

$$U_3 = \{(x, y) : x > 1, y > 1\}; U_4 = \{(x, y) : x \geq 1, y \geq 1\}.$$

3. 考慮所有 n 階實方陣所形成 over $\mathbb{R}$ 的 vector space M_n . 令 $W_1 = \{A \in M_n : A^t = A\}$, $W_2 = \{A \in M_n : A^t = -A\}$, $W_3 = \{[a_{ij}] \in M_n : a_{ij} = 0, \forall i \leq j\}$.

(a) 證明 W_1, W_2 為 M_n 的 subspace 且 $W_1 + W_2 = M_n$. (Hint: 對任意方陣 B , $B + B^t$ 一定是 symmetric; $B - B^t$ 呢?)

(b) 證明 W_3 為 M_n 的 subspace 且 $W_1 + W_3 = M_n$. (Hint: 試 $n = 2$ 的情況。)

4. 假設 V 為 vector space 且 $S \subseteq V$. 證明 S 是 V 的 subspace 若且唯若 $\text{Span}(S) = S$.

5. 在以下的 vector space 中檢查是否 $\mathbf{v}, \mathbf{w}$ 在 $\text{Span}(S)$ 中。

(a) $\mathbf{v} = (-1, 1, 1, 2), \mathbf{w} = (2, -1, 1, -3), S = \{(1, 0, 1, -1), (0, 1, 1, 1)\}$ in $\mathbb{R}^4$.

(b) $\mathbf{v} = -x^3 + 2x^2 + 3x + 3, \mathbf{w} = 2x^3 - x^2 + x + 3, S = \{x^3 + x^2 + x + 1, x^2 + x + 1, x + 1\}$ in $P_3(\mathbb{R})$.

(c) $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}, \mathbf{w} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, S = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right\}$ in $M_2(\mathbb{R})$.